

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Magická ohodnocení grafů a
sportovní turnaje
Magic-type labelings of graphs and round
robin tournaments

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě dne 5.května 2013


.....

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce, Doc. Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za jeho ochotu, trpělivost při konzultacích a perfektní vedení.

Dále bych rád poděkoval mým rodičům, kteří mě během studia plně podporují.

Abstrakt

Bakalářská práce poukazuje na možnost využití distance magic labelingu a degree-distance magic labelingu při plánování neúplných turnajů. Tato bakalářská práce se zabývá distance magic labelingem, který se snažíme zobecnit. Využíváme dosažených výsledků v oblasti distance magic labelingu a zavádíme nový degree-distance magic labeling, následně tyto dva labeliny porovnáváme. Vytváříme řadu konstrukcí degree-distance magic grafů.

Klíčová slova:

magický labeling, distance magic labeling, degree-distance magic labeling, plánování turnajů, spravedlivý neúplný turnaj

Abstract

Thesis points out the possibility of practical application of distance magic labeling and degree-distance magic labeling for tournament scheduling. This thesis deals with distance magic labeling, which we try to generalize. We use the results obtained in the field of distance magic labeling and we introduce a new degree-distance magic labeling. We compare these two labelings. We provide many constructions of degree-distance magic graphs.

Key Words:

magic labeling, distance magic labeling, degree-distance magic labeling, tournament scheduling, fair incomplete tournament

Seznam použitých symbolů a zkratek

$G = (V, E)$	– Graf G s množinou vrcholů V a množinou hran E
K_n	– Kompletní graf na n vrcholech
$K_{m,n}$	– Kompletní bipartitní graf s partitami o m a n vrcholech
C_n	– Cyklus na n vrcholech
\overline{G}	– Doplněk grafu G
$G[H]$	– Kompozice grafů G a H v tomto pořadí
$\deg(x)$	– Stupeň vrcholu x
$N(x)$	– Množina všech sousedních vrcholů vrcholu x
$w_f(x)$	– Váha vrcholu x při ohodnocení f
k	– Magická konstanta
DM	– Distance magic grafy
DDM	– Degree-distance magic grafy
PDM	– Pravidelné distance magic grafy
PDDM	– Pravidelné degree-distance magic grafy

Zadání bakalářské práce

Student:

Martin Kovář

Studijní program:

B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103R031 Výpočetní matematika

Téma:

Magická ohodnocení grafů a sportovní turnaje
Magic-type labelings of graphs and round robin tournaments

Zásady pro vypracování:

Magická ohodnocení grafů patří mezi "klasická" témata teorie grafů.

Existuje řada různých typů magických ohodnocení.

Ukazuje se, že tzv. "distance magic" ohodnocení (dříve 1-VMV ohodnocení) má pěknou aplikaci při sestavování neúplných sportovních turnajů.

Doposud bylo zkoumáno distance magic ohodnocení pravidelných grafů, avšak ve sportovních turnajích, které se hrají v systému divizí, má smysl zkoumat analogická ohodnocení nepravidelných grafů.

Cílem práce je zavést takové obecnější ohodnocení než "distance magic", aby bylo možno odpovídající neúplný turnaj prohlásit za spravedlivý, tj. aby součet sil oponentů vydělený počtem odehraných zápasů byl pro každý tým konstantní.

Součástí práce bude i nalezení tříd grafů, které taková ohodnocení mají.

Práci lze rozdělit do následujících částí:

- magická ohodnocení grafů, studium známých výsledků a technik
- zobecnění "distance magic" ohodnocení, které umožní plánování spravedlivých neúplných turnajů, kdy různé týmy odehraní různý počet zápasů
- sestavení tříd grafů, které mají takové ohodnocení
- interpretace teoretických výsledků v kontextu praktické aplikace plánování sportovních soutěží

Seznam doporučené odborné literatury:

Literatura:

- W. Wallis: Magic graphs, Birkhauser 2000.
- J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, The Electronic Journal of Combinatorics, DS 6 (2010).
- odborné články a texty podle pokynů vedoucího

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Petr Kovář, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012

Datum odevzdání: 07.05.2013



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Obsah

1	Úvod	3
1.1	Neúplné turnaje	3
1.1.1	Pravidelné grafy	3
1.1.2	Nepřavidelné grafy	4
1.2	Příklady neúplných turnajů	5
1.3	Cíl práce	8
2	Základní pojmy, definice a věty	9
3	Degree-distance magic labeling	16
3.1	Grafy s vrcholy lichého stupně	27
3.2	Pravidelné grafy	30
3.3	Distance magic labeling a degree-distance magic labeling	30
3.3.1	Znázornění distance magic grafů a degree-distance magic grafů	39
3.4	Další konstrukce degree-distance magic grafů	40
3.4.1	Degree-distance magic labeling a grafové spojení	40
3.4.2	Degree-distance magic labeling a přidávání hran	47
4	Závěr	54

Seznam obrázků

1	Turnaj mezi deseti týmy.	5
2	Turnaj mezi deseti týmy s využitím distance magic labelingu.	6
3	Turnaj mezi deseti týmy s využitím degree-distance magic labelingu.	7
4	Znázornění jednoduchého grafu G pomocí diagramu.	9
5	Stupně vrcholů grafu G	10
6	Graf G a doplněk grafu G	11
7	Kompletní grafy K_2 , K_3 , K_4 a K_5	11
8	Cykly C_3 , C_4 , C_5 a C_6	11
9	Cesty P_2 , P_3 , P_4 a P_5	12
10	Kompletní bipartitní grafy $K_{m,n}$ na 9 vrcholech.	12
11	Kompozice grafů $P_n[P_2]$ a $P_2[P_n]$	13
12	Sled, tah a cesta v grafu W_{6+1}	14
13	Část grafu $G[\overline{K_3}]$, znázornění vrcholu (u_2, v_2) a jeho sousedů.	18
14	Grafy S_4 , $\overline{K_3}$ a degree-distance magic ohodnocení grafu $S_4[\overline{K_3}]$	20
15	Graf $C_4[\overline{K_3}]$ a označení kopií $\overline{K_3}$	22
16	Graf $C_4[\overline{K_3}]$	23
17	Dva obarvené grafy složené z cyklů.	25
18	Vrcholové obarvení grafu D_{12}	26
19	Vrcholové obarvení grafu D_{16}	27
20	Distance magic labelingy pro kompletní bipartitní grafy na 16 vrcholech.	31
21	Degree-distance magic labeling grafu $K_{2,5}$	38
22	Znázornění DM, DDM, PDM a PDDM grafů Vennovým diagramem.	39
23	Degree-distance magic labeling grafu $C_4[\overline{K_2}] \vee x$ a $C_5[\overline{K_2}] \vee x$	42
24	Degree-distance magic labeling grafu $C_4[\overline{K_2}] \vee x$ a $C_5[\overline{K_2}] \vee x$	44
25	Degree-distance magic labeling grafu $C_4[\overline{K_2}] \vee H$ a grafu $C_5[\overline{K_2}] \vee H$	47
26	Degree-distance magic labeling grafu $C_4[\overline{K_2}] \vee H$	47
27	Graf G s přidaným cyklem C_4	49
28	Odebrání cyklu C_4 z grafu G	50
29	Ztotožnění vrcholů grafu G a grafu H	52
30	Graf H a odebrání hran grafu H z grafu G	53

1 Úvod

Magický labeling grafů patří mezi nové oblasti teorie grafů. V celém textu budeme používat výraz „labeling“ místo českého výrazu „ohodnocení“, výraz labeling budeme skloňovat podle vzoru hrad. Pojem magický labeling grafů zavedl Sedláček v roce 1963. Magický labeling se stal velmi populární krátce po roce 2000, kdy vyšlo mnoho publikací na toto téma a byly zavedeny různé typy magických labelingů. Vyčerpávající seznam magických labelingů je uveden v článku [5]. V této práci se částečně zaměříme na distance magic labeling.

Nechť G je graf řádu n . Distance magic labeling grafu G je bijektivní zobrazení f přiřazující každému vrcholu grafu G číslo z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, že existuje taková konstanta k , aby pro každý vrchol x grafu G platilo

$$\sum_{u \in N(x)} f(u) = k,$$

kde $N(x)$ je množina všech sousedních vrcholů vrcholu x . Suma

$$w_f(x) = \sum_{u \in N(x)} f(u)$$

je váha vrcholu x a konstanta k je magická konstanta grafu. Pokud pro graf existuje distance magic labeling, nazveme ho distance magic graf. Distance magic labeling byl zaveden nezávisle více autory a je také označován jako 1-vertex magic vertex labeling nebo sigma labeling (Σ -labeling). Nyní se nejčastěji používá označení „distance magic labeling“. Opět používáme počeštěnou verzi anglického výrazu, protože dostupná literatura je prakticky pouze v angličtině.

1.1 Neúplné turnaje

1.1.1 Pravidelné grafy

Distance magic labeling je spojován s problematikou pořádání spravedlivých neúplných turnajů. Úplný turnaj, kde každý tým hraje se všemi ostatními týmy, považujeme za spravedlivý. Předpokládejme, že chceme pořádat turnaj, ale nemáme dostatek času, abychom odehráli úplný turnaj. Mohli bychom pořádat spravedlivý neúplný turnaj s následujícími dvěma požadavky:

- I) Každý tým hraje stejný počet zápasů.
- II) Obtížnost turnaje pro každý tým napodobuje obtížnost úplného turnaje.

Druhá podmínka je vyřešena následovně. Pokud známe například výsledky turnaje v předešlém roce, pak můžeme týmy ohodnotit číslem, které reprezentuje jeho sílu. Pokud máme n týmů, pak nejsilnější tým ohodnotíme číslem n , druhý nejsilnější tým ohodnotíme číslem $(n-1)$, až nejslabší tým ohodnotíme číslem 1. V úplném turnaji je součet sil oponentů i -tého týmu $S_i = n(n-1)/2 - i$. Všimněme si, že součty sil oponentů S_1, S_2, \dots, S_n tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí jedna. Požadujeme tedy, aby součet sil oponentů ve spravedlivém neúplném turnaji tvořil také aritmetickou posloupnost s diferencí jedna. Chceme najít turnaj pro celkově n týmů, kde každý tým hraje g zápasů a součet sil oponentů i -tého týmu je $\tilde{S}_i = n(n-1)/2 - i - k$, kde k je přirozené číslo.

Tento problém je ekvivalentní s hledáním množiny zápasů, které jsou vynechány z úplného turnaje tak, aby vznikl spravedlivý neúplný turnaj. Chceme najít turnaj pro celkově n týmů, kde každý tým hraje $(n-g-1)$ zápasů a součet sil oponentů i -tého týmu je roven číslu k .

Hledání takové množiny vynechaných zápasů není nic jiného, než hledání distance magic labelingu pro r -pravidelný graf na n vrcholech, kde $r = (n-g-1)$ je počet odehraných zápasů a magická konstanta k je součet sil oponentů. Příklad uvedeme v kapitole 1.2.

1.1.2 Nepravidelné grafy

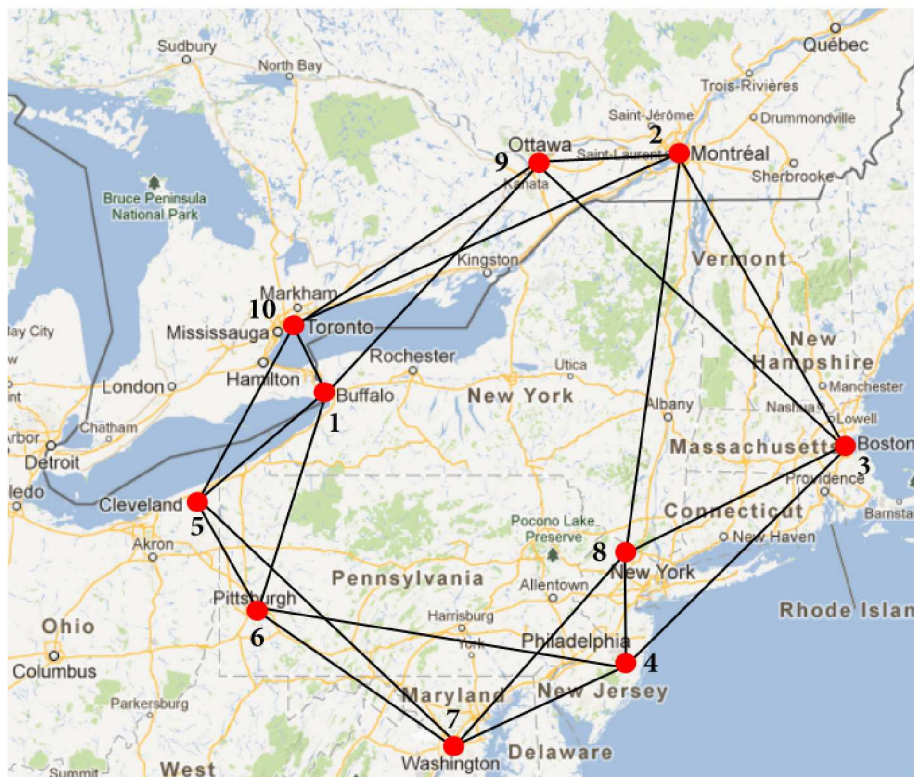
Doposud jsme se bavili pouze o turnajích, kde každý tým hraje stejný počet zápasů (v řeči teorie grafů mluvíme o pravidelných grafech). Pokud bychom od této podmínky upustili, mohli bychom se věnovat turnajům, kde každý tým odehraje libovolný počet zápasů (v řeči teorie grafů mluvíme o nepravidelných grafech). Mohli bychom se například zaměřit na turnaje s více divizemi, kde je pouze několik zápasů mezi divizemi a mnoho zápasů v rámci divize. U takových turnajů hrozí, že například silnější týmy by hrály většinu zápasů se slabšími týmy neboli slabší týmy by hrály většinu zápasů proti výrazně silnějším týmům. Toto by vedlo k nespravedlnosti takového turnaje, což je nežádoucí. Abychom odstranili nespravedlnost takového turnaje, zavedeme degree-distance magic labeling, kde součet sil oponentů i -tého týmu je vydělen počtem odehraných zápasů i -tého týmu a výsledek tohoto podílu bude pro každý tým stejný.

Degree-distance magic labeling je hlavním tématem této bakalářské práce, ale zaměříme se také na vztah distance magic labelingu a degree-distance magic labelingu.

1.2 Příklady neúplných turnajů

V následujících třech příkladech budeme pracovat s mapou severovýchodní části USA, kde týmy jsou reprezentovány vrcholy a zápasy jsou reprezentovány hranami mezi těmito vrcholy. Známe výsledky turnaje v předešlém roce a jsme schopni určit sílu jednotlivých týmů. Síla týmu je reprezentována číslem.

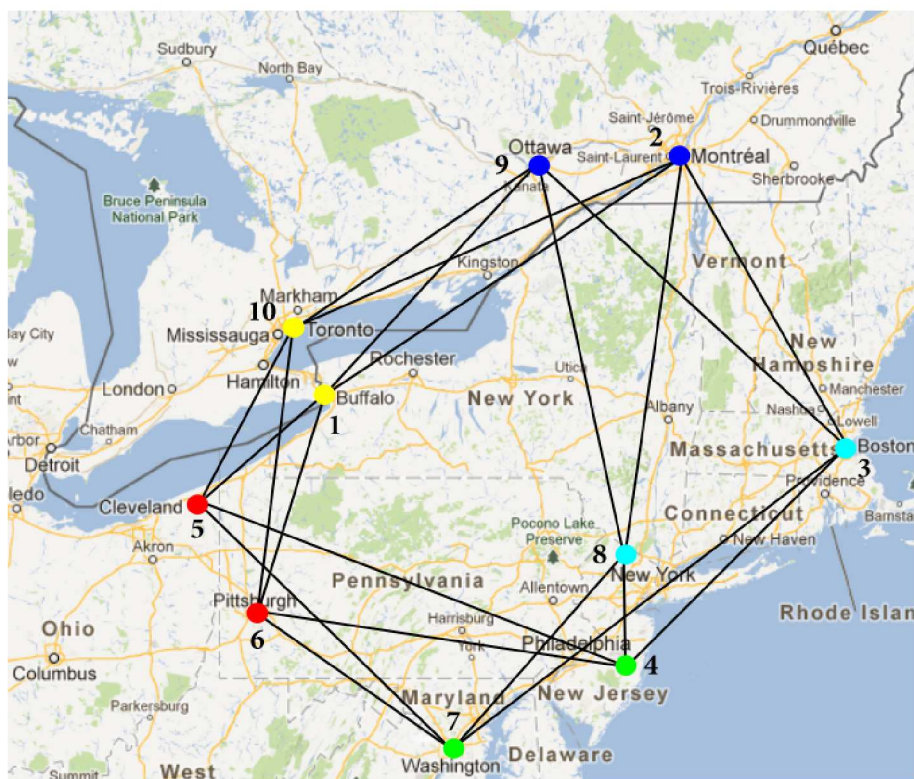
Příklad 1.1. Pokusme se navrhnout turnaj bez využití magického labelingu. Pokud máme 10 týmů, pak nejsilnější tým ohodnotíme číslem 10, druhý nejsilnější tým ohodnotíme číslem 9, až nejslabší tým ohodnotíme číslem 1.



Obrázek 1: Turnaj mezi deseti týmy.

Každý tým sice odehraje 4 zápasy, ale nejslabší tým turnaje má součet sil oponentů 30 a třetí nejsilnější tým turnaje má součet sil oponentů 16. Tento turnaj nemůžeme považovat za příliš spravedlivý.

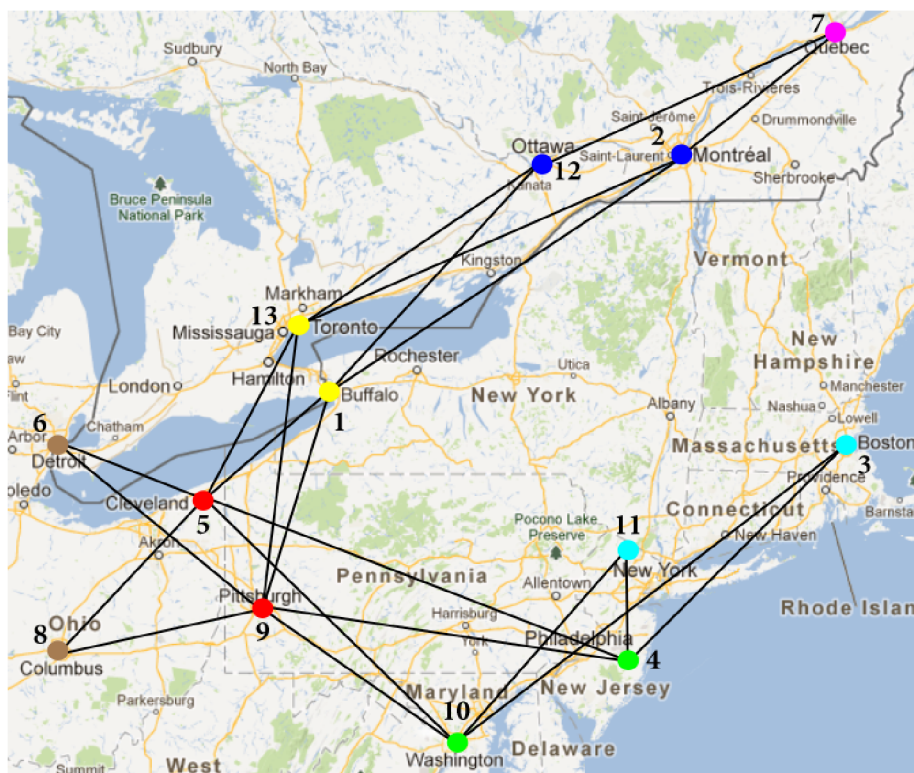
Příklad 1.2. Pokusme se navrhnout turnaj s využitím distance magic labelingu. Pokud máme 10 týmů, pak nejsilnější tým ohodnotíme číslem 10, druhý nejsilnější tým ohodnotíme číslem 9, až nejslabší tým ohodnotíme číslem 1. Navíc nechceme, aby některé sousední týmy hrály proti sobě, protože v průběhu přípravy na soutěž hrají často přátelské zápasy.



Obrázek 2: Turnaj mezi deseti týmy s využitím distance magic labelingu.

Každý tým odehraje 4 zápasy a součet sil oponentů každého týmu je 22. Tento turnaj můžeme považovat za spravedlivý.

Příklad 1.3. Pokusme se navrhnout turnaj s využitím degree-distance magic labelingu. Pokud máme 13 týmů, pak nejsilnější tým ohodnotíme číslem 13, druhý nejsilnější tým ohodnotíme číslem 12, až nejslabší tým ohodnotíme číslem 1. Navíc nechceme, aby některé sousední týmy hrály proti sobě, protože v průběhu přípravy na soutěž hrají často přátelské zápasy.



Obrázek 3: Turnaj mezi deseti týmy s využitím degree-distance magic labelingu.

Součet sil oponentů i -tého týmu je vydělen počtem odehraných zápasů i -tého týmu a výsledek tohoto podílu je pro každý tým stejný. Tento turnaj můžeme považovat za spravedlivý. V příkladu je průměrná síla soupeřů každého týmu rovna sedmi. Můžeme si všimnout, že jsme do turnaje snadno přidali další týmy a zachovali jsme spravedlnost turnaje.

1.3 Cíl práce

V kapitole 2 zavedeme základní pojmy, definice a věty z oblasti teorie grafů, pro jejich pochopení by měla stačit znalost středoškolské matematiky.

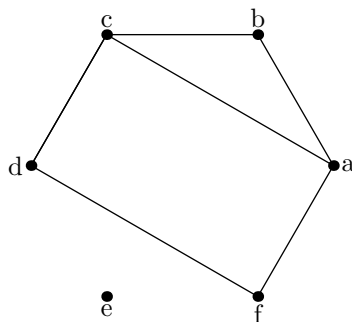
V kapitole 3 zavedeme nový degree-distance magic labeling. Začneme vytvářet různé konstrukce degree-distance magic grafů. Obvykle uvedeme problém, který se postupně snažíme vyřešit. Některá námi zavedená tvrzení jsou postupně upravována tak, aby byla co nejvíce obecná. Můžeme říci, že provádíme výzkum, kde se nám podařilo ukázat a později zobecnit některá tvrzení.

2 Základní pojmy, definice a věty

V této kapitole zavedeme základní pojmy, definice a věty, na které se budeme v dalším textu odkazovat. Zavedeme však pouze takové pojmy, definice a věty, které budou nutné pro úplné pochopení problematiky této bakalářské práce. Více informací z oblasti teorie grafů nalezneme ve skriptech [2]. Některé definice a věty byly převzaty ze skript [2]. V dalším textu budeme pod pojmem „graf“ rozumět strukturu zavedenou v Definici 2.1.

Definice 2.1. Jednoduchý graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je neprázdná množina vrcholů a E je nějaká množina dvouprvkových podmnožin množiny V . Prvkům E říkáme hrany.

Množinu všech vrcholů grafu G budeme značit $V(G)$ a množinu všech hran $E(G)$. Prvky množiny V budeme značit malými písmeny, například x . Prvky množiny E budeme značit zápisem $\{x, y\}$, nebo zjednodušeným zápisem xy . Grafy znázorňujeme pomocí diagramů, kde se vrcholy znázorňují jako body v rovině a hrany jako spojnice těchto bodů.



Obrázek 4: Znázornění jednoduchého grafu G pomocí diagramu.

Na obrázku 4 je znázorněn graf $G = (V, E)$ s množinou vrcholů $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ a množinou hran $E = \{ab, ac, af, bc, cd, df\}$.

Grafy často popisují vztahy mezi objekty reálného světa, které jsou reprezentovány vrcholy grafu. Vztahy mezi objekty jsou v grafu reprezentovány hranami.

Dva vrcholy x, y v grafu jsou sousední neboli závislé, jestliže v grafu existuje hrana xy . V opačném případě se vrcholy nazývají nesousední neboli nezávislé.

Definice 2.2. Množina sousedních vrcholů vrcholu x je tvořena všemi vrcholy y , pro které platí $xy \in E$. Množinu všech sousedních vrcholů vrcholu x budeme značit $N(x)$.

Na obrázku 4 má vrchol a množinu sousedních vrcholů $N(a) = \{b, c, f\}$.

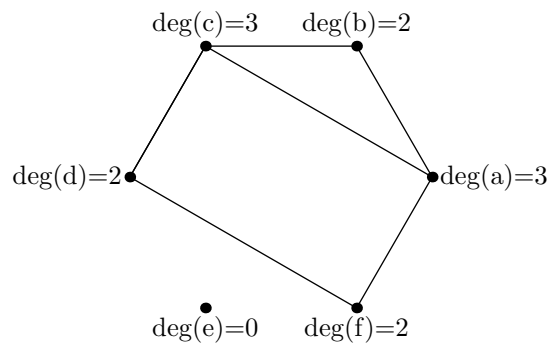
Definice 2.3. Řádem grafu $G = (V, E)$ rozumíme počet vrcholů grafu neboli $|V(G)|$.

Řád grafu budeme v naprosté většině případů značit písmenem n .

Definice 2.4. Řekneme, že hrana $e = \{x, y\} \in E(G)$ je incidentní s vrcholem x právě tehdy, když $x \in e$. Vrcholy x, y nazveme koncové vrcholy hrany e .

Poznámka. V celé práci budeme pracovat s jednoduchými grafy. Dva vrcholy $x, y \in V(G)$ mohou být spojeny jen jednou hranou. Nerozlišujeme, zda hrana xy vede z vrcholu x do vrcholu y nebo naopak. Není přípustné, aby vrchol byl spojen hranou sám se sebou.

Definice 2.5. Stupeň vrcholu v je počet hran, se kterými je vrchol v incidentní, a značí se $\deg(v)$.

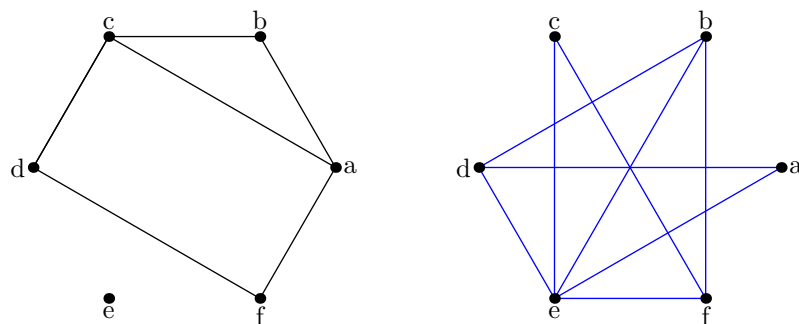


Obrázek 5: Stupně vrcholů grafu G .

Vrcholy, které mají stupeň vrcholu roven nule, nazveme izolované vrcholy. Pokud budeme chtít zdůraznit, ke kterému grafu se stupeň vrcholu v vztahuje, použijeme dolní index $\deg_G(v)$. Graf, ve kterém jsou všechny vrcholy stejného stupně, se nazývá pravidelný. V opačném případě je graf nepravidelný.

Definice 2.6. Doplněk grafu $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V, F)$, kde $F = \binom{V}{2} \setminus E$ a $V(\overline{G}) = V(G)$. $\binom{V}{2}$ značí všechny dvouprvkové podmnožiny množiny $V(G)$.

Doplněk grafu G obsahuje všechny vrcholy grafu G a každý vrchol $x \in V(\overline{G})$ je sousední právě s těmi vrcholy, se kterými v grafu G nesousedí.



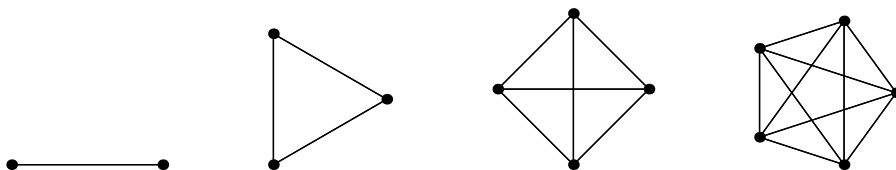
Obrázek 6: Graf G a doplněk grafu G .

Základní typy grafů

Pro důležité typy grafů se používá vlastní označení. Název obvykle plyne z vlastností grafu, podle kterých jej můžeme se zadaným počtem vrcholů sestavit.

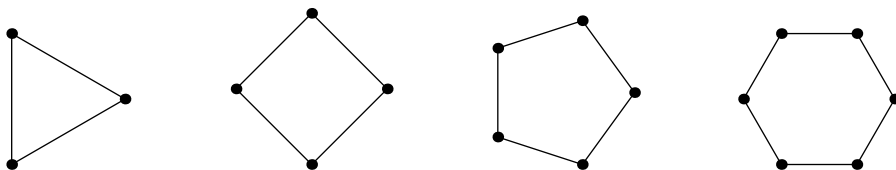
Graf, který obsahuje jediný vrchol (a žádnou hranu) se nazývá triviální graf.

Graf na n vrcholech, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran, se nazývá kompletní graf a značí se K_n . Každý kompletní graf má všechny vrcholy nejvyššího možného stupně, je tedy $(n - 1)$ -pravidelný graf.



Obrázek 7: Kompletní grafy K_2 , K_3 , K_4 a K_5 .

Graf s vrcholovou množinou $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, pro $n \geq 3$, a množinou hran $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$ se nazývá cyklus a značí se C_n . Cyklus je 2-pravidelný graf se stejným počtem vrcholů a hran $E(C_n) = n$.



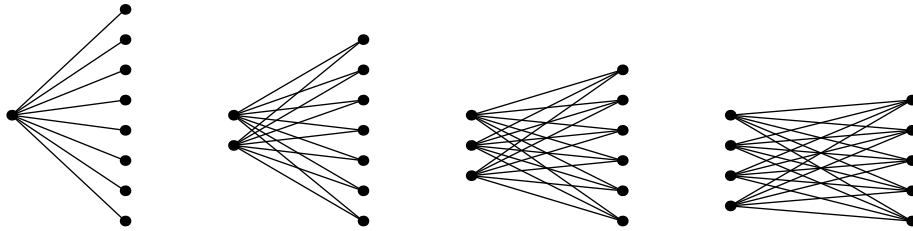
Obrázek 8: Cykly C_3 , C_4 , C_5 a C_6 .

Cesta je graf s množinou vrcholů $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a množinou hran $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$, cestu značíme P_n (z anglického „path“).



Obrázek 9: Cesty P_2 , P_3 , P_4 a P_5 .

Graf, jehož vrcholová množina je sjednocením dvou neprázdných disjunktních množin U , W a množina hran je $E = \{uw : u \in U \wedge w \in W\}$, se nazývá kompletní bipartitní graf s partitami U a W . Kompletní bipartitní graf značíme $K_{m,n}$, kde $m = |U|$ a $n = |W|$.



Obrázek 10: Kompletní bipartitní grafy $K_{m,n}$ na 9 vrcholech.

Kompletní bipartitní graf $K_{1,n}$ také nazýváme hvězda, hvězdu značíme S_n (z anglického „star“).

Definice 2.7. Kompozice neboli také složení grafů G a H v tomto pořadí je graf, který má vrcholovou množinu danou kartézským součinem $V(G) \times V(H)$ a dva vrcholy (u_1, v_1) a (u_2, v_2) jsou spojeny hranou právě tehdy, když platí $u_1 = u_2$ a $v_1 v_2 \in E(H)$ nebo $u_1 u_2 \in E(G)$. Kompozici grafů G a H značíme $G[H]$.

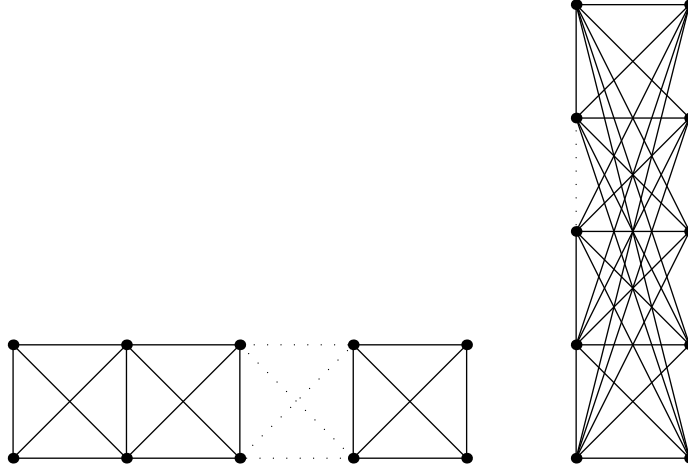
Všimněme si, že kompozice grafů není komutativní operace, například kompozice grafů $P_n[P_2]$ není isomorfní s $P_2[P_n]$. Kompozice grafů $P_n[P_2]$ a $P_2[P_n]$ je znázorněna na obrázku 11.

Jedno základní pozorování, které udává kvantitní vztah mezi stupni vrcholů a počtem hran, je princip sudosti. Věta 2.8 je citována ze skript [2].

Věta 2.8. (Princip sudosti) Mějme graf G s vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n , kde $n \geq 1$. Symbolem $h(G)$ označme počet hran grafu G . Potom

$$\sum_{v_i \in V(G)} \deg(v_i) = 2h(G).$$

Poznámka. Věta 2.8 nám říká, že neexistuje graf lichého řádu se všemi vrcholy lichého stupně. Jestliže každá hrana zvyšuje stupeň vrcholu o 1 právě u dvou vrcholů, pak v každém grafu je počet hran roven polovině součtu stupňů všech vrcholů grafu.



Obrázek 11: Kompozice grafů $P_n[P_2]$ a $P_2[P_n]$.

Definice 2.9. Mějme dán graf $G = (V, E)$. Řekneme, že graf $H = (V', E')$ je podgrafem grafu G , jestliže $V' \subseteq V$ a současně $E' \subseteq E$.

Pro graf, který vznikne z grafu G vynecháním jedné hrany uv , zavedeme označení $G - uv$. Podobně graf, který vznikne z grafu G vynecháním jednoho vrcholu v a všech hran incidentních s tímto vrcholem, budeme značit $G - v$. Je-li N nějaká podmnožina vrcholů grafu G , tak symbolem $G - N$ značíme graf, který vznikne z G odebráním všech vrcholů v N a všech hran incidentních s těmito vrcholy, možnost $N = V(G)$ nepřipouštíme. Podobně, je-li M nějaká podmnožina hran grafu G , tak symbolem $G - M$ značíme graf, který vznikne z G odebráním všech hran v M .

Speciálním případem podgrafu je indukovaný podgraf, který obsahuje všechny hrany původního grafu G , které jsou incidentní s vrcholy v množině V' .

Definice 2.10. Sled v grafu G je taková posloupnost vrcholů a hran

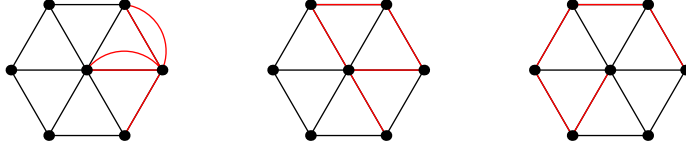
$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n),$$

že hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1} a v_i pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$. Sled se nazývá (v_0, v_n) -sled.

Definice 2.11. Tah je sled, ve kterém se žádná hrana neopakuje. Tah s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v budeme nazývat (u, v) -tah.

Definice 2.12. Cesta je sled, ve kterém se neopakují vrcholy. Cestu s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v budeme nazývat (u, v) -cesta.

Graf, který vznikne z cyklu $C_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ přidáním vrcholu v_0 a všech hran v_0v_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ se nazývá kolo a značíme jej W_{n+1} (z anglického „wheel“). Příklad takového grafu je na obrázku 12.



Obrázek 12: Sled, tah a cesta v grafu W_{6+1}

Definice 2.13. Řekneme, že vrchol v je dosažitelný z vrcholu u v grafu G , jestliže v G existuje (u, v) -sled. Graf je souvislý, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje (u, v) -sled. V opačném případě je graf nesouvislý.

Definice 2.14. Grafy G a H se nazývají isomorfní, jestliže existuje bijekce $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ taková, že každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou sousední právě tehdy, když jsou sousední vrcholy $\varphi(u), \varphi(v) \in V(H)$. Píšeme $G \simeq H$. Zobrazení φ se nazývá isomorfismus.

Například grafy $K_{2,2}$ a C_4 jsou isomorfní neboli $K_{2,2} \simeq C_4$.

Definice 2.15. Součet nebo disjunktní sjednocení grafu G a H je sjednocení grafů G a H , jejichž vrcholové množiny jsou disjunktní. Součet grafů značíme $G + H$. Symbolem kG budeme značit sjednocení takových k kopií grafu G , kde každé dvě kopie jsou vrcholově disjunktní. Výsledný graf kG nazýváme k kopií grafu G .

Definice 2.16. Spojení grafu G a vrcholu $v \notin V(G)$ je graf, který vznikne přidáním v do vrcholové množiny $V(G)$ a současným přidáním všech hran vx , kde $x \in V(G)$. Spojení značíme $G \vee v$. Obecně spojení dvou disjunktních grafů $G \vee H$ je graf, který vznikne ze součtu $G + H$ přidáním všech hran xy , kde $x \in V(G)$ a $y \in V(H)$.

Matice sousednosti

Vrcholy grafu G označíme v_1, v_2, \dots, v_n . Matice sousednosti $A(G)$ je čtvercová matice řádu n , ve které je prvek $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když jsou vrcholy v_i a v_j sousední. V opačném případě je $a_{ij} = 0$.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Matice $A(G)$ je pro jednoduché grafy symetrická a součet čísel v i -tém řádku (v i -tém sloupci) matice $A(G)$ je roven stupni vrcholu v_i .

Matice sousednosti $A(G)$ grafu G z Obrázku 4 je

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

3 Degree-distance magic labeling

Definice 3.1. Necht $G = (V, E)$ je graf řádu n a neobsahuje izolované vrcholy. Pak bijektivní zobrazení $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, pro které existuje $k \in \mathbb{Q}$ a pro každý vrchol $v \in V$ platí

$$\frac{\sum_{u \in N(v)} f(u)}{\deg v} = k,$$

nazveme degree-distance magic labeling. Uvedený zlomek udává váhu vrcholu v . Jestliže graf G obsahuje izolované vrcholy, jejich váhu neurčujeme.

Kotzigova matice

Definujeme Kotzigovu matici velikosti $m \times n$ jako matici rozměru (m, n) . Každý řádek obsahuje permutaci prvků množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a každý sloupec má stejný součet prvků. Součet v každém sloupci je $\frac{m}{n} \binom{n+1}{2} = \frac{m(n+1)}{2}$, což je přirozené číslo, pokud je m sudé nebo n liché.

Příklad Kotzigovy matice rozměru $(2, n)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Součty ve sloupcích Kotzigovy matice rozměru $(2, n)$ jsou $n+1$. Kotzigova matice rozměru $(3, n)$ existuje pouze tehdy, když je n liché, tedy $n = 2r + 1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \cdots & r+1 & r+2 & r+3 & \cdots & 2r+1 \\ 2r+1 & 2r-1 & \cdots & 1 & 2r & 2r-2 & \cdots & 2 \\ r+1 & r+2 & \cdots & 2r+1 & 1 & 2 & \cdots & r \end{array} \right)$$

Součty ve sloupcích Kotzigovy matice rozměru $(3, n)$ jsou $3r+3$. Kotzigovy matice s více řádky můžeme konstruovat tak, že pod sebe skládáme Kotzigovy matice rozměru $(2, n)$ a $(3, n)$. Vždy si však musí být rovny počty sloupců daných matic. Jestliže v Kotzigově matici rozměru $(2, n)$ jsou součty ve sloupcích stejné a v Kotzigově matici rozměru $(3, n)$ jsou součty ve sloupcích také stejné, pak složená Kotzigova matice má v každém sloupci stejný součet.

Definice 3.2. Kotzigova matice řádu (m, n) existuje tehdy, je-li $m > 1$ a $m(n-1) \equiv 0 \pmod{2}$.

Poznámka. Tedy je-li m liché, pak musí být n také liché. Pokud je m sudé, pak na paritě n nezáleží.

Věta 3.3. Necht $G = (V, E)$ je libovolný graf řádu n a zároveň platí, že $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $m(n-1) \equiv 0 \pmod{2}$. Pak grafová kompozice $G[\overline{K_m}]$ je degree-distance magic graf.

Důkaz. Důkaz je konstruktivní. Víme, že Kotzigova matice bude existovat v těchto případech.

- i) Pokud $m \equiv 1 \pmod{2}$, pak v Kotzigově matici bude lichý počet řádků a původní graf $G = (V, E)$ musí být řádu $n \in \mathbb{N} \wedge n \equiv 1 \pmod{2}$.
- ii) Pokud $m \equiv 0 \pmod{2}$, pak v Kotzigově matici bude sudý počet řádků a původní graf $G = (V, E)$ bude libovolného řádu $n \in \mathbb{N}$.

Kotzigova matice neexistuje tehdy, je-li graf G sudého řádu n a současně graf $\overline{K_m}$ lichého řádu, pro $m > 1$.

Pro provedení důkazu si označme:

- i) M je Kotzigova matice, která má v každém řádku čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a prvky matice označíme a_{ij} ,
- ii) \tilde{M} je tak zvaná liftovaná Kotzigova matice obsahující právě čísla z množiny $\{1, 2, \dots, mn\}$ a prvky matice označíme \tilde{a}_{ij} ,
- iii) $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vrcholy grafu G ,
- iv) $V(\overline{K_m}) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ vrcholy grafu $\overline{K_m}$.

Ověříme následující dva předpoklady.

- I) Musíme sestavit liftovanou Kotzigovu matici tak, aby obsahovala všechna čísla z množiny $\{1, 2, \dots, mn\}$. Zobrazení čísel z množiny $\{1, 2, \dots, mn\}$ na vrcholy grafové kompozice $G[\overline{K_m}]$ bude injektivní. Z matice M vznikne matice \tilde{M} tak, že v matici \tilde{M} se žádné číslo nebude opakovat. Můžeme použít funkci

$$q((v_i, u_j)) = \tilde{a}_{ij} = (i - 1)n + a_{ij},$$

kde u_j je vrchol v původním grafu G a v_i je vrchol v doplňku kompletního grafu $\overline{K_m}$. Z původní Kotzigovy matice M dostaneme liftovanou Kotzigovu matici \tilde{M} , ve které v i -tém řádku jsou právě čísla z množiny

$$\{1 + (i - 1)n, 2 + (i - 1)n, \dots, n + (i - 1)n\}.$$

Zde už je jasné, že zobrazení vrcholů grafové kompozice $G[\overline{K_m}]$ na čísla z množiny $\{1, 2, \dots, mn\}$ je injektivní.

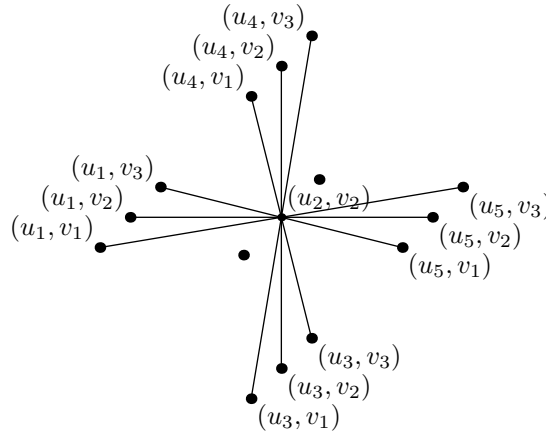
Než budeme pokračovat v důkazu věty, uvedeme si příklad Kotzigovy matice a liftované Kotzigovy matice, například rozměru $(4, 6)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 \end{pmatrix}$$

Dále uvedeme například Kotzigovu matici a liftovanou Kotzigovu matici rozměru $(3, 7)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 14 & 12 & 10 & 8 & 13 & 11 & 9 \\ 18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

- II) V grafu G má vrchol u_i souseda u_j , pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \wedge i \neq j$, když $u_i u_j$ je hrana v G . Vezměme si libovolný vrchol grafu $G[\overline{K_m}]$, například (u_2, v_2) . V grafu $G[\overline{K_m}]$ má vrchol (u_2, v_2) sousedy (u_j, v_t) , kde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $t \in \{1, 2, \dots, m\}$.



Obrázek 13: Část grafu $G[\overline{K_3}]$, znázornění vrcholu (u_2, v_2) a jeho sousedů.

Váhu vrcholu (u_2, v_2) můžeme vypočítat následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} w((u_2, v_2)) &= \frac{\sum_{u_j \in N(u_2)} \sum_{t=1}^m q((v_t, u_j))}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_2, v_2)} = \frac{\sum_{u_j \in N(u_2)} \sum_{t=1}^m (t-1)n + a_{tj}}{m \cdot \deg_G(u_2)} = \\ &= \frac{\sum_{u_j \in N(u_2)} \frac{m(mn+1)}{2}}{m \cdot \deg_G(u_2)} = \frac{\deg_G(u_2) \frac{m(mn+1)}{2}}{m \cdot \deg_G(u_2)} = \frac{mn+1}{2} \end{aligned}$$

Nyní důkaz dokončíme. Je potřeba vypočítat váhu obecného vrcholu (u_i, v_s) , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $s \in \{1, 2, \dots, m\}$.

$$\begin{aligned} w((u_i, v_s)) &= \frac{\sum_{u_j \in N(u_i)} \sum_{t=1}^m q((v_t, u_j))}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s)} = \frac{\sum_{u_j \in N(u_i)} \sum_{t=1}^m (t-1)n + a_{tj}}{m \cdot \deg_G(u_i)} = \\ &= \frac{\sum_{u_j \in N(u_i)} \frac{m(mn+1)}{2}}{m \cdot \deg_G(u_i)} = \frac{\deg_G(u_i) \frac{m(mn+1)}{2}}{m \cdot \deg_G(u_i)} = \frac{mn+1}{2} \end{aligned}$$

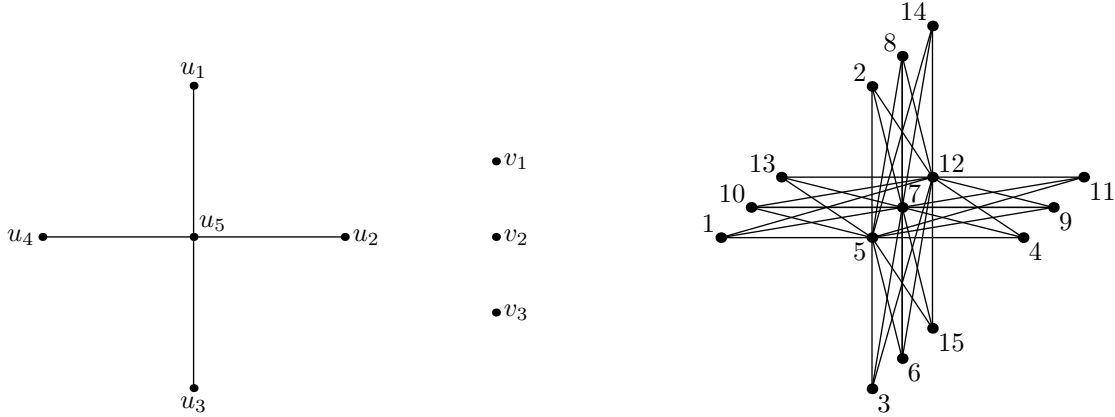
Váha obecného vrcholu (u_i, v_s) v grafu $G[\overline{K_m}]$ je rovna $(mn+1)/2$, čísla m a n jsou konstanty. Tedy můžeme psát, že $(mn+1)/2 = k$, kde k je magická konstanta grafu $G[\overline{K_m}]$ v degree-distance magic labelingu. \square

Výše uvedený důkaz nám současně dává také návod, jak zkonstruovat degree-distance magic graf $G[\overline{K_m}]$, kde G je graf řádu n , avšak pouze za předpokladu, že existuje Kotzigova matice s n sloupci a m řádky.

Příklad 3.4. Sestavme degree-distance magic graf $S_4[\overline{K_3}]$, který je znázorněný na obrázku 14. Pro $m = 3$ a $n = 5$ musíme zkonstruovat Kotzigu matici M se 3 řádky a 5 sloupci. Pro zadaný graf $S_4[\overline{K_3}]$ pomocí funkce q upravíme Kotzigu matici M na liftovanou Kotzigu matici \tilde{M} tak, aby v různých řádcích byla různá čísla.

$$q((v_i, u_j)) = \tilde{a}_{ij} = (i-1)n + a_{ij}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 8 & 6 & 9 & 7 \\ 13 & 14 & 15 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$



Obrázek 14: Grafy S_4 , $\overline{K_3}$ a degree-distance magic ohodnocení grafu $S_4[\overline{K_3}]$.

Jestliže máme liftovanou Kotzigovu matici \tilde{M} , pak můžeme ohodnotit vrcholy grafu $S_4[\overline{K_3}]$ tak, že čísla z každého sloupce matice \tilde{M} přiřadíme vrcholům, které odpovídají jedné kopii grafu $\overline{K_3}$.

Poznámka. Při grafové kompozici $G[\overline{K_m}]$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $m \equiv 0 \pmod{2}$, je výsledný graf vždy sudého řádu. Navíc výsledný graf bude vždy degree-distance magic graf, jelikož Kotzigova matice má sudý počet řádků.

Víme, že Kotzigova matice rozměru (m, n) neexistuje tehdy, je-li m liché a n je sudé. Můžeme se tedy ptát, zda existuje takový graf G , aby grafová kompozice $G[\overline{K_m}]$ byla pro n sudé a m liché degree-distance magic graf.

Problém 3.5. Existuje graf $G = (V, E)$ řádu $n \equiv 0 \pmod{2}$ takový, že grafová kompozice $G[\overline{K_m}]$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $m \equiv 1 \pmod{2}$ je degree-distance magic graf?

Věta 3.6. Graf $C_n[\overline{K_m}]$, $n \in \mathbb{N}$ a $n \equiv 0 \pmod{4}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $m \equiv 1 \pmod{2}$ je degree-distance magic graf.

Dříve než přistoupíme k důkazu Věty 3.6, zavedeme následující pojem.

Upravená Kotzigova matice

Už víme, že Kotzigova matice rozměru (m, n) neexistuje tehdy, je-li m liché a n je sudé. Navrhujeme tedy novou konstrukci Kotzigovy matice tak, aby měla ve sloupcích dva různé součty, každý z těchto součtů bude v matici právě $n/2$ krát. Sestavme matici $A = (a_{ij})$.

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = 1 \\ 2r + 2 - 2j & i = 2; 1 \leq j \leq r \\ 4r + 1 - 2j & i = 2; r + 1 \leq j \leq 2r \\ r + j & i = 3; 1 \leq j \leq r \\ j - r & i = 3; r + 1 \leq j \leq 2r \end{cases}$$

Zavedme upravenou Kotzigovu matici rozměru $(3, n)$, kde $n = 2r$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & r+2 & \cdots & 2r \\ 2r & 2r-2 & \cdots & 2 & 2r-1 & 2r-3 & \cdots & 1 \\ r+1 & r+2 & \cdots & 2r & 1 & 2 & \cdots & r \end{array} \right)$$

Označme si sloupce matice jako $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$. Ověříme součty ve sloupcích upravené Kotzigovy matice rozměru $(3, n)$. Ve sloupcích \mathbf{s}_1 až $\mathbf{s}_{n/2}$ jsou součty

$$j + (2r + 2 - 2j) + (r + j) = 3r + 2$$

a ve sloupcích $\mathbf{s}_{n/2+1}$ až \mathbf{s}_n jsou součty

$$j + (4r + 1 - 2j) + (-r + j) = 3r + 1.$$

Dále zavedme upravenou Kotzigovu matici rozměru $(2, n)$. Libovolný počet těchto matic můžeme „připojit“ za upravenou Kotzigovu matici rozměru $(3, n)$ jako nové řádky.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & r+2 & \cdots & 2r \\ 2r & 2r-1 & \cdots & r+1 & r & r-1 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Upravenou Kotzigovu matici s více řádky můžeme konstruovat tak, že pod sebe skládáme matice rozměru $(2, n)$ a $(3, n)$. Vždy si však musí být rovny počty sloupců daných matic.

My však potřebujeme, aby každé číslo bylo v matici právě jednou. Toho dosáhneme tak, že použijeme funkci

$$q((v_i, u_j)) = \tilde{a}_{ij} = (i - 1)n + a_{ij}.$$

Výsledná matice bude liftovaná upravená Kotzigova matice s vlastnostmi popsanými výše.

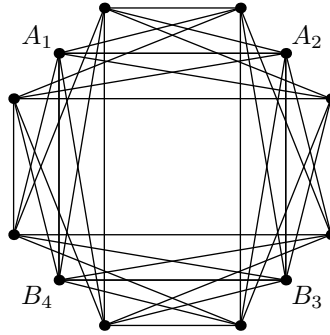
Důkaz. Uvědomme si, že pro graf $C_n[\overline{K_m}]$ neexistuje Kotzigova matice řádu (n, m) , kde $n \equiv 0 \pmod{4}$ a liché m . Použijeme výše popsanou konstrukci liftované upravené Kotzigovy matice, kde ve sloupcích máme dva různé součty, každý z těchto součtů je v matici právě $n/2$ krát.

Kompozice $C_n[\overline{K_m}]$ obsahuje n kopií grafu $\overline{K_m}$. Zavedme bijektivní zobrazení $f : \overline{K_m} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ tak, že i -tá kopie $\overline{K_m}$ sousedí s $(i - 1)$. kopií a $(i + 1)$. kopií $\overline{K_m}$. Pro $i = 1$ definujeme $(i - 1)$. kopii $\overline{K_m}$ jako n -tou kopii $\overline{K_m}$. Pro $i = n$ definujeme $(i + 1)$. kopii $\overline{K_m}$ jako 1. kopii $\overline{K_m}$.

Pokud:

- $i \equiv 1 \pmod{4} \vee i \equiv 2 \pmod{4}$, pak přiřadíme i -té kopii $\overline{K_m}$ označení A_i .
- $i \equiv 3 \pmod{4} \vee i \equiv 0 \pmod{4}$, pak přiřadíme i -té kopii $\overline{K_m}$ označení B_i .

Kopií označených A_i je stejně, jako označených B_i a to právě $n/2$. Změňme index kopií označených jako A_i tak, aby $i \in \{1, 2, \dots, n/2\}$ a změňme index kopií označených jako B_i tak, aby $i \in \{n/2 + 1, n/2 + 2, \dots, n\}$. Každá kopie grafu $\overline{K_m}$ sousedí s jednou kopií označenou jako A a s jednou kopií označenou jako B .



Obrázek 15: Graf $C_4[\overline{K_3}]$ a označení kopií $\overline{K_3}$.

Označme sloupce liftované upravené Kotzigovy matice \tilde{M} jako $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$. Sloupec $\mathbf{s}_p : p \in \{1, 2, \dots, n/2\}$ přiřadíme kopii označené jako A_i , pokud $i = p$. Sloupec $\mathbf{s}_q : q \in \{n/2 + 1, n/2 + 2, \dots, n\}$ přiřadíme kopii označené jako B_i , pokud $i = q$. Nakonec vrcholům dané kopie $\overline{K_m}$ injektivně přiřadíme čísla příslušného sloupce.

Z definice upravené Kotzigovy matice je jasné, že příslušná liftovaná Kotzigova matice bude obsahovat každé číslo z množiny $\{1, 2, \dots, mn\}$ právě jednou. Jsou také zaručeny konstantní součty v levé i pravé polovině upravené Kotzigovy matice.

Každý vrchol má právě $2m$ sousedů, m sousedů přísluší kopii grafu $\overline{K_m}$ označené jako A a dalších m sousedů přísluší kopii grafu $\overline{K_m}$ označené jako B .

Pro vyjádření váhy vrcholu si označíme:

- $V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vrcholy grafu C_n ,
- $V(\overline{K_m}) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ vrcholy grafu $\overline{K_m}$,

iii) $s_{sp} : p \in \{1, 2, \dots, n/2\}$ součet p -tého sloupce,

iv) $s_{sq} : q \in \{n/2 + 1, n/2 + 2, \dots, n\}$ součet q -tého sloupce.

Vypočítejme váhu obecného vrcholu (u_i, v_s) , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $s \in \{1, 2, \dots, m\}$.

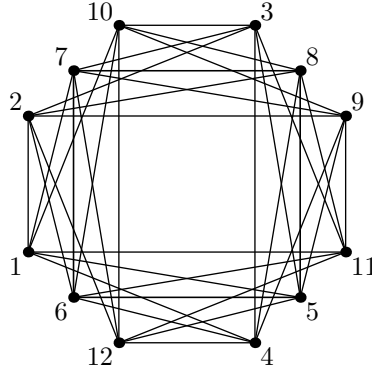
$$w((u_i, v_s)) = \frac{s_{sp} + s_{sq}}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s)} = \frac{s_{sp} + s_{sq}}{2m}$$

Nyní je už jasné, že každý vrchol bude mít stejnou váhu a výsledný graf bude distance magic graf, navíc bude současně i degree-distance magic graf. \square

Příklad 3.7. Sestavme degree-distance magic graf $C_4[\overline{K_3}]$, který je znázorněný na obrázku 16. Nejprve provedeme konstrukci upravené Kotzigovy matice M , která obsahuje dva různé součty (konkrétně součty 7 a 8), každý právě dvakrát. Pomocí funkce q upravíme upravenou Kotzigovu matici M na liftovanou upravenou Kotzigovu matici \tilde{M} , kde každé číslo z množiny $\{1, 2, \dots, 12\}$ je právě jednou.

$$q((v_i, u_j)) = \tilde{a}_{ij} = (i - 1)n + a_{ij}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 6 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$



Obrázek 16: Graf $C_4[\overline{K_3}]$.

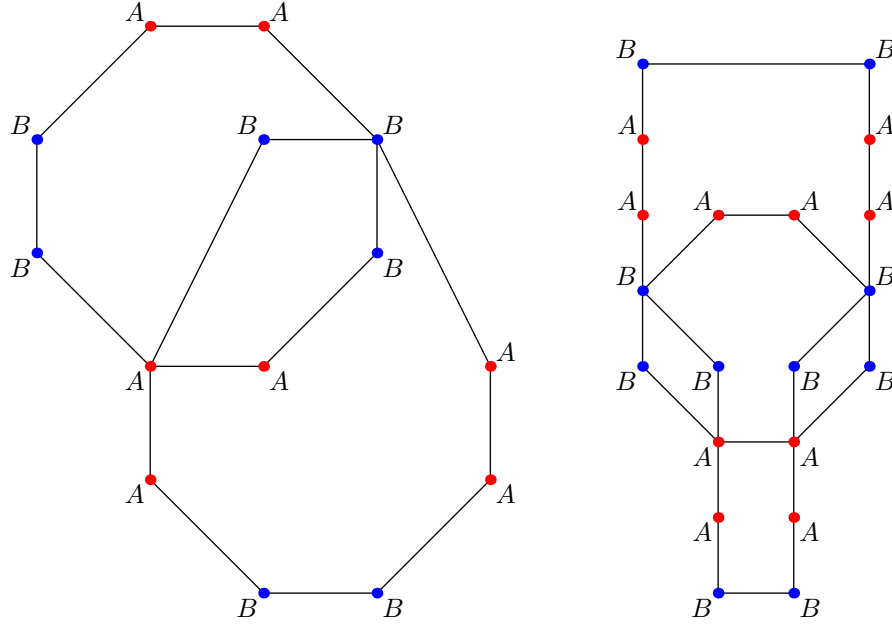
Můžeme využít konstrukce z důkazu Věty 3.6 neboli konstrukce degree-distance magic grafů $C_n[\overline{K_m}]$, kde $n \in \mathbb{N} \wedge n \equiv 0 \pmod{4}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \wedge m \equiv 1 \pmod{2}$ tak, že budeme i kopií takových grafů „skládat“ na sebe podle následující konstrukce. Máme dvě možnosti jak popsat „skládání“ grafů.

- Ještě před provedením grafové kompozice si vezmeme i kopií grafů C_n , pro $n \in \mathbb{N} \wedge n \equiv 0 \pmod{4}$ a obarvíme je dvěma barvami tak, aby každý vrchol měl jednoho souseda první barvy a jednoho souseda druhé barvy. Nyní vybereme libovolné dva správně obarvené grafy C_n a druhý graf položíme na první tak, že vybereme v druhém grafu jeden vrchol obarvený první barvou a jeden vrchol obarvený druhou barvou a ztotožníme je s vrcholy prvního grafu vždy stejné barvy. Nesmíme však vybrat v obou grafech sousední vrcholy, neboť po slepení grafů nemůžeme mít zdvojené hrany.
- U každého grafu $C_n[\overline{K_m}]$ z celkově i těchto grafů postupujeme jako v předchozím důkazu, kde jsme si označili kopie grafu $\overline{K_m}$ písmeny A a B . Když máme grafy $C_n[\overline{K_m}]$ označeny, můžeme grafy „skládat“ na sebe následujícím způsobem. Vezmeme jeden graf $C_n[\overline{K_m}]$ a ten přeložíme druhým grafem $C_n[\overline{K_m}]$. U druhého grafu vybereme jednu kopii $\overline{K_m}$ typu A a její vrcholy ztotožníme s vrcholy jakékoliv kopie $\overline{K_m}$ typu A prvního grafu, dále u druhého grafu vybereme jednu kopii $\overline{K_m}$ typu B a její vrcholy ztotožníme s vrcholy jakékoli kopie $\overline{K_m}$ typu B prvního grafu. Nesmíme však vybrat v obou grafech sousední kopie $\overline{K_m}$.

Výše popsanou konstrukci můžeme zobecnit tak, že před provedením grafové kompozice si vezmeme i kopií grafů C_n , pro $n \in \mathbb{N} \wedge n \equiv 0 \pmod{4}$ a obarvíme je dvěma barvami tak, aby každý vrchol měl jednoho souseda první barvy a jednoho souseda druhé barvy. Nyní vybereme libovolné dva správně obarvené grafy C_n a druhý graf položíme na první tak, že vybereme v druhém grafu t vrcholů obarvených první barvou a t vrcholů obarvených druhou barvou a ztotožníme je s vrcholy prvního grafu vždy stejné barvy. Alespoň v jednom z těchto dvou grafů C_n bude platit, že indukovaný podgraf tvořený takovými $2t$ vrcholy bude obsahovat pouze izolované vrcholy, aby nedošlo ke zdvojení hran, což je v jednoduchém grafu nepřípustné.

Můžeme samozřejmě „skládat“ různé dlouhé cykly. Na obrázku 17 jsou znázorněny dva grafy, graf vlevo je „složený“ ze dvou cyklů C_8 a graf vpravo je „složený“ z cyklu C_8 a cyklu C_{16} . U grafu vpravo si všimněme, že indukovaný podgraf tvořený vybranými vrcholy cyklu C_{16} obsahuje pouze izolované vrcholy, avšak indukovaný podgraf tvořený vybranými vrcholy cyklu C_8 neobsahuje pouze izolované vrcholy, ale také jednu hranu.

Věta 3.8. Jestliže existuje vrcholové obarvení grafu $G = (V, E)$ takové, aby pro každý vrchol $u_i \in V$ platilo, že má právě $\deg(u_i)/2$ sousedů první barvy, $\deg(u_i)/2$ sousedů druhé barvy a počet vrcholů obarvených první barvou je stejný jako počet



Obrázek 17: Dva obarvené grafy složené z cyklů.

vrcholů obarvených druhou barvou, pak grafová kompozice $G[\overline{K_m}]$, kde $m > 1$ je degree-distance magic graf.

Věta 3.8 je zobecněním Věty 3.6 a opět využívá konstrukci upravené Kotzigovy matice. Důkaz Věty 3.8 vychází z důkazu Věty 3.6.

Důkaz. Graf G řádu n má $n/2$ vrcholů první barvy a $n/2$ vrcholů druhé barvy. Tento předpoklad je důležitý, protože můžeme využít konstrukci upravené Kotzigovy matice, kde máme zaručeny konstantní součty v levé i pravé polovině upravené Kotzigovy matice.

Pro vyjádření váhy vrcholu si označíme:

- i) $V(C) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vrcholy grafu G ,
- ii) $V(\overline{K_m}) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ vrcholy grafu $\overline{K_m}$,
- iii) $s_{s_A} : A \in \{1, 2, \dots, n/2\}$ součet libovolného sloupce první poloviny upravené Kotzigovy matice,
- iv) $s_{s_B} : B \in \{n/2 + 1, n/2 + 2, \dots, n\}$ součet libovolného sloupce druhé poloviny upravené Kotzigovy matice.

Víme, že každý vrchol grafu G má $\deg(u_i)/2$ sousedů první barvy a $\deg(u_i)/2$ sousedů druhé barvy. Můžeme tedy vyjádřit váhu obecného vrcholu (u_i, v_s) , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $s \in \{1, 2, \dots, m\}$.

$$w((u_i, v_s)) = \frac{\deg_G(u_i)/2 \cdot s_{s_A} + \deg_G(u_i)/2 \cdot s_{s_B}}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s)} = \frac{\deg_G(u_i)/2(s_{s_A} + s_{s_B})}{\deg_G(u_i) \cdot m} = \frac{s_{s_A} + s_{s_B}}{2 \cdot m}$$

Váhu obecného vrcholu (u_i, v_s) v grafu $G[\overline{K_m}]$ jsme vyjádřili. Můžeme psát, že

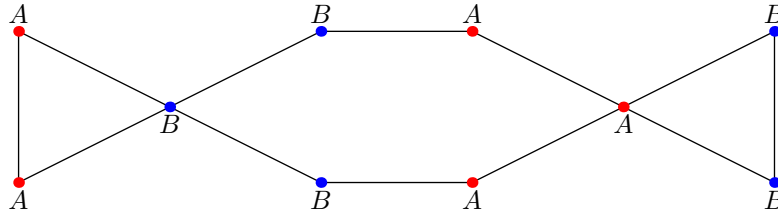
$$\frac{s_{s_A} + s_{s_B}}{2 \cdot m} = k,$$

kde k je magická konstanta grafu $G[\overline{K_m}]$ v degree-distance magic labelingu a známe hodnoty s_{s_A} a s_{s_B} . \square

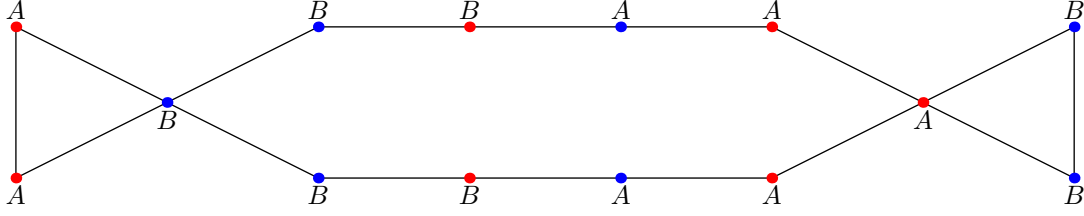
Navrháme konstrukci grafů, pro které platí, že každý vrchol $u_i \in V$ má právě $\deg(u_i)/2$ sousedů první barvy, $\deg(u_i)/2$ sousedů druhé barvy a počet vrcholů obarvených první barvou je stejný jako počet vrcholů obarvených druhou barvou.

Zabývat se budeme grafy $C_n[\overline{K_m}]$, kde $n \in \mathbb{N} \wedge n \equiv 0 \pmod{4} \wedge n \geq 12$. Předpokládejme, že máme správně obarvený graf C_n tak, že každý vrchol má jednoho souseda první barvy a jednoho souseda druhé barvy. Konstrukce takového grafu je popsána v důkazu Věty 3.6.

Ve správně obarveném grafu C_n ztotožníme dva vrcholy stejné barvy tak, abychom vytvořili trojcyklus. Dále ztotožníme dva vrcholy druhé stejné barvy tak, abychom vytvořili další trojcyklus a zároveň $(n - 6)$ -cyklus a nejkratší cesta od prvního ztotožněného vrcholu k druhému ztotožněnému vrcholu je $(n - 6)/2$. Takový graf je znázorněn na obrázcích 18 a 19. Graf značíme D_n (z anglického „candy“), protože graf vypadá jako sladkost. Všimněte si, že graf D_n není možné získat konstrukcí ze strany 24.



Obrázek 18: Vrcholové obarvení grafu D_{12} .



Obrázek 19: Vrcholové obarvení grafu D_{16} .

3.1 Grafy s vrcholy lichého stupně

Mějme graf $G = (V, E)$ řádu n . Z Věty 2.8 (Princip sudosti) víme, že neexistuje graf lichého řádu se všemi vrcholy lichého stupně.

Problém 3.9. Existuje degree-distance magic graf řádu $n \equiv 0 \pmod{2}$, kde má každý vrchol v_i stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$?

Prozkoumáním podgrafu indukovaného na vrcholech s lichým ohodnocením umíme dokázat následující větu.

Věta 3.10. Neexistuje graf $G = (V, E)$ řádu $n \equiv 2 \pmod{4}$, kde má každý vrchol v_i stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$.

Důkaz. Důkaz provedeme tak, že vyjádříme magickou konstantu k dvěma různými způsoby, metodou dvojího počítání. V prvním vyjádření magické konstanty k provedeme metodu dvojího počítání součtu všech vah.

I) První vyjádření magické konstanty k provedeme tak, že porovnáme následující dvě vyjádření.

i) Víme, že z Definice 3.1 platí

$$\forall v_i \in V(G) : w(v_i) = \frac{\sum_{u \in N(v)} f(u)}{\deg v} = k.$$

Dále vyjádříme součet ohodnocení sousedů vrcholu v_i v grafu $G = (V, E)$, kde $v_i \in V$.

$$\sum_{v_i \in V} k \cdot \deg(v_i) = k \sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = k \cdot 2|E| \quad (1)$$

ii) Příspěvek do celkového součtu od vrcholu v_i , součet přes všechny vrcholy je

$$\sum_{i=1}^n i \cdot \deg(v_i). \quad (2)$$

U vyjádření (2) si všimněme, že paritu i -tého součtu sumy určuje výhradně číslo i , jelikož všechny stupně vrcholů $\deg(v_i)$ jsou liché. Vyjádření (1) a (2) se sobě musí nutně rovnat. Vyjádřeme si z rovnosti (1) a (2) magickou konstantu k .

$$\begin{aligned} k \cdot 2|E| &= \sum_{i=1}^n i \cdot \deg(v_i) \\ k &= \frac{\sum_{i=1}^n i \cdot \deg(v_i)}{2|E|} \end{aligned} \quad (3)$$

Jestliže platí, že počet vrcholů je $n \equiv 2 \pmod{4}$, pak

$$\sum_{i=1}^n i \cdot \deg(v_i)$$

je liché číslo, $2|E|$ ve jmenovateli je sudé číslo. První vyjádření magické konstanty k máme.

II) Provedeme druhé vyjádření magické konstanty k . Obecně pro degree-distance magic graf platí

$$k = \frac{\sum_{u \in N(v)} f(u)}{\deg(v)}. \quad (4)$$

V čitateli může být sudé nebo liché číslo a ve jmenovateli je vždy liché číslo. Vyjádření (3) a (4) konstanty k jsou správně. Neshodují se v paritě čitatele a jmenovatele, tudíž degree-distance magic graf řádu $n \equiv 2 \pmod{4}$, kde má každý vrchol v_i stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$, nemůže existovat.

Naznačíme neshodu parity čitatele a jmenovatele ve vyjádření (3) a (4).

$$\frac{L}{S} \neq \frac{S \vee L}{L},$$

kde S reprezentuje sudé číslo a L reprezentuje liché číslo. □

Vyřešili jsme tři čtvrtiny Problému 3.9. Stále však zůstává otevřený problém, zda existuje degree-distance magic graf řádu $n \equiv 0 \pmod{4}$, kde má každý vrchol v_i stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$.

S využitím Věty 3.27 z pozdější kapitoly lze dokázat následující větu, která kompletně řeší Problém 3.9. Následující věta byla dokázána těsně před odevzdáním bakalářské práce.

Věta 3.11. Neexistuje degree-distance magic graf G řádu $n \equiv 0 \pmod{2}$, kde má alespoň jeden vrchol v_i stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$.

Důkaz. Důkaz provedeme tak, že vyjádříme magickou konstantu k dvěma různými způsoby, metodou dvojího počítání.

- I) Magická konstanta degree-distance magic grafu je podle Věty 3.27 rovna $(n+1)/2$. Jestliže počet vrcholů grafu G je sudý, pak magická konstanta k grafu G bude ve tvaru

$$k = \frac{L}{2},$$

kde L reprezentuje liché číslo.

- II) Víme, že z Definice 3.1 platí

$$\forall v_i \in V(G) : w(v_i) = \frac{\sum_{u \in N(v)} f(u)}{\deg(v)} = \tilde{k}.$$

Pokud má alespoň jeden vrchol v_i stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$, pak magická konstanta \tilde{k} takového vrcholu v_i bude ve tvaru

$$\tilde{k} = \frac{X}{L},$$

kde L reprezentuje liché číslo a X reprezentuje součet ohodnocení sousedů.

Dochází k neshodě parity vyjádření magické konstanty k a magické konstanty \tilde{k} u vrcholu v_i , který má stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$. Neexistuje tedy degree-distance magic graf sudého řádu, kde má alespoň jeden vrchol v_i stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$. \square

3.2 Pravidelné grafy

Nyní prozkoumáme vztah mezi distance magic labelingem a degree-distance magic labelingem pravidelných grafů.

Věta 3.12. Každý pravidelný distance magic graf $G = (V, E)$ je zároveň pravidelný degree-distance magic graf.

Důkaz. Pro všechny vrcholy v_i pravidelného distance magic grafu $G = (V, E)$ platí,

$$\forall v_i \in V(G) : \deg v_i = r,$$

kde r je přirozené číslo. Z definice distance magic labelingu víme, že pro graf G existuje distance magic labeling f a magická konstanta k .

$$\sum_{u \in N(v)} f(u) = k$$

Definice 3.1 degree-distance magic labelingu vychází z definice distance magic labelingu.

$$\frac{\sum_{u \in N(v)} f(u)}{\deg v} = \frac{k}{\deg v} = \frac{k}{r} = \tilde{k}$$

U grafů s distance magic labelingem a degree-distance magic labelingem se budou lišit pouze konstanty k a \tilde{k} . Jestliže je graf r -pravidelný, pak je číslo ve jmenovateli stejné pro každý vrchol a je tedy jasné, že množina pravidelných distance magic grafů je totožná s množinou pravidelných degree-distance magic grafů. \square

Navíc si můžeme uvědomit, že množina pravidelných degree-distance magic grafů je vlastní podmnožinou degree-distance magic grafů. Nepravidelné degree-distance magic grafy lze konstruovat například pomocí Věty 3.3.

3.3 Distance magic labeling a degree-distance magic labeling

Nyní prozkoumáme vztah mezi distance magic labelingem a degree-distance magic labelingem nepravidelných grafů. Věta 3.13 je citována ze článku [1], shrnuje existenci distance magic labelingu vybraných základních tříd grafů.

Věta 3.13. • Distance magic labeling grafu P_n existuje pouze pokud $n \in \{1, 3\}$.

- Distance magic labeling grafu C_n existuje pouze pokud $n = 4$.
- Distance magic labeling grafu K_n existuje pouze pokud $n = 1$.

- Distance magic labeling grafu W_n existuje pouze pokud $n = 4$.

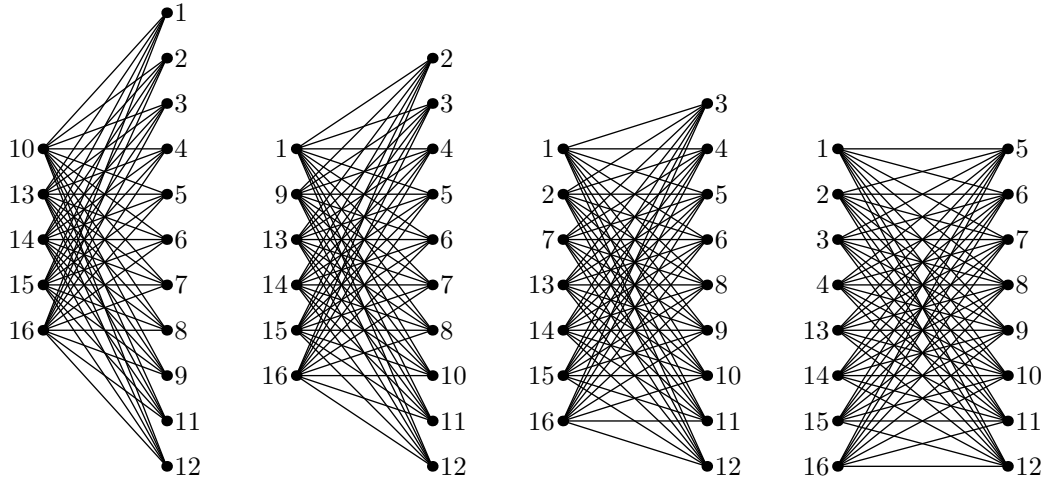
Věta 3.14 je citována ze článku [1].

Věta 3.14. Nechť platí $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_p$, kde $2 \leq p \leq 3$. Nechť

$$s_i = \sum_{j=1}^i a_j.$$

Pak existuje distance magic labeling kompletního multipartitního grafu H_{a_1, \dots, a_p} právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:

- $a_2 \geq 2$,
- $n(n+1) \equiv 0 \pmod{2p}$, kde $n = s_p = |V(H_{a_1, \dots, a_p})|$ a
- $\sum_{j=1}^{s_i} (n+1-j) \geq \frac{in(n+1)}{2p}$ pro $1 \leq i \leq p$.



Obrázek 20: Distance magic labelings pro kompletní bipartitní grafy na 16 vrcholech.

Problém 3.15. Existuje distance magic graf $G = (V, E)$, který by současně nebyl degree-distance magic graf?

Víme, že daný graf $G = (V, E)$ nemůže být pravidelný, protože pak by podle věty 3.12 byl degree-distance magic graf. Odpověď na tento problém dá Věta 3.14 s Větou 3.16.

Věta 3.16. Degree-distance magic labeling grafu $K_{m,n}$ neexistuje právě tehdy, když je m a n liché.

Důkaz. Rozdělíme důkaz do dvou částí. V první části důkazu ukážeme, že neexistuje degree-distance magic labeling grafu $K_{m,n}$, pokud je m a n liché. Ve druhé části důkazu navrhneme konstrukci degree-distance magic labelingu grafu $K_{m,n}$.

- I) Ukažme, že neexistuje degree-distance magic labeling grafu $K_{m,n}$, pokud je m a n liché.

Uvažujme množinu kompletních bipartitních grafů $K_{m,n}$, kde má jedna ze dvou partit grafu m vrcholů a druhá n vrcholů. V partitě, kde je m vrcholů, má každý vrchol stupeň n a v partitě, kde je n vrcholů, má každý vrchol stupeň m .

Pro degree-distance magic grafy $K_{m,n}$ platí, že existuje zobrazení $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, m+n\}$ a konstanta $k \in \mathbb{Q}$ taková, aby pro každý vrchol $v \in V$ platilo

$$\frac{\sum_{u \in N(v)} f(u)}{\deg v} = k.$$

Pro provedení důkazu si označme součet množiny čísel $\{1, 2, \dots, m+n\}$ jako

$$s = \frac{(1+m+n)(m+n)}{2},$$

kde $s \in \mathbb{N}$. Dále mějme libovolné přirozené číslo $c \in \mathbb{N}$, pro které platí $c < s$.

Jelikož každý vrchol v partitě m má n sousedů, pak musí platit, že součet ohodnocení vrcholů v partitě s n vrcholy vydělený počtem vrcholů v partitě s n vrcholy, se musí rovnat součtu ohodnocení vrcholů v partitě s m vrcholy vyděleného počtem vrcholů v partitě s m vrcholy. Zapišme toto tvrzení následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} \frac{s-c}{n} &= \frac{c}{m} \\ \frac{\frac{(1+m+n)(m+n)}{2} - c}{n} &= \frac{c}{m} \\ \frac{m(1+m+n)(m+n)}{2} - cm &= cn \\ c &= \frac{m(1+m+n)}{2} \end{aligned}$$

Pro vrcholy v partitě n platí, že součet ohodnocení těchto vrcholů je

$$c = \frac{m(1+m+n)}{2}.$$

Nyní už snadno dopočítáme součet ohodnocení vrcholů v partitě m .

$$s - c = \frac{(1+m+n)(m+n)}{2} - \frac{m(1+m+n)}{2} = \frac{n(1+m+n)}{2}$$

Máme součty ohodnocení vrcholů v partitě m i n . Z těchto dvou součtů je jasné, že pokud obě partity budou mít lichý počet vrcholů, pak nebude existovat degree-distance magic labeling, protože čitatel obou zlomků bude liché číslo, přičemž c i $(s - c)$ jsou přirozená čísla.

- II) Navrháme konstrukci degree-distance magic labelingu grafu $K_{m,n}$, pokud má alespoň jedna partita sudý počet vrcholů.

Jelikož platí, že $K_{m,n}$ je isomorfní s $K_{n,m}$, budeme požadovat, aby počet vrcholů v partitě s m vrcholy byl sudý. Rozdělme množinu čísel $\{1, 2, \dots, m+n\}$ následovně a barevně množinu čísel rozlišme.

$$\left\{1, 2, \dots, \frac{m}{2}, \quad \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \dots, \frac{m}{2} + n, \quad \frac{m}{2} + n + 1, \frac{m}{2} + n + 2, \dots, m + n\right\}$$

Vrcholům partity s m vrcholy přiřadíme čísla z množin

$$\left\{1, 2, \dots, \frac{m}{2}\right\} \quad \left\{\frac{m}{2} + n + 1, \frac{m}{2} + n + 2, \dots, m + n\right\}.$$

Vrcholům partity s n vrcholy přiřadíme čísla z množiny

$$\left\{\frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \dots, \frac{m}{2} + n\right\}.$$

Musíme ukázat, že součet ohodnocení vrcholů v partitě s n vrcholy vydělený počtem vrcholů v partitě s n vrcholy se bude rovnat součtu ohodnocení vrcholů v partitě s m vrcholy vyděleného počtem vrcholů v partitě s m vrcholy.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(\frac{m}{2}+1+\frac{m}{2}+n)n}{2}}{n} &= \frac{\frac{(1+\frac{m}{2})\frac{m}{2}}{2} + \frac{(\frac{m}{2}+n+1+m+n)\frac{m}{2}}{2}}{m} \\ \frac{(m+n+1)}{2} &= \frac{\frac{(\frac{m}{2}+\frac{m^2}{4})}{2} + \frac{(\frac{3m^2}{4}+mn+\frac{m}{2})}{2}}{m} \\ \frac{(m+n+1)}{2} &= \frac{\frac{(m+n+1)m}{2}}{m} \\ \frac{(m+n+1)}{2} &= \frac{(m+n+1)}{2} \end{aligned}$$

Vidíme, že součet ohodnocení vrcholů v partitě s n vrcholy vydělený počtem vrcholů v partitě s n vrcholy je roven součtu ohodnocení vrcholů v partitě s m vrcholy vyděleného počtem vrcholů v partitě s m vrcholy. Degree-distance magic labeling grafu $K_{m,n}$ existuje, pokud má alespoň jedna partita sudý počet vrcholů. \square

Víme, kdy neexistuje degree-distance magic labeling grafu $K_{m,n}$. Věta 3.14 nám říká, kdy existuje distance magic labeling grafu $K_{m,n}$. Pokusme se najít nekonečně mnoho nepravidelných grafů, pro které existuje distance magic labeling a neexistuje degree-distance magic labeling.

Zkusme například grafy $K_{m-2,m}$, kde m je liché a ukažme, že $m \geq 4$. Z Věty 3.16 víme, že neexistuje degree-distance magic labeling grafu $K_{m-2,m}$ pro liché m , protože obě partity by měly lichý počet vrcholů. Musíme ověřit podmínky Věty 3.14, abychom zjistili, zda $K_{m-2,m}$ má distance magic labeling.

- $a_2 \geq 2$

Podmínka $m \geq 2$ platí, dokonce musí platit $m \geq 3$, protože nejmenší možný graf je $K_{1,3}$.

- $n(n+1) \equiv 0 \pmod{2p}$, kde $n = s_p = |V(H_{a_1, \dots, a_p})|$

Označme si $m = 2t + 1$, kde t je přirozené číslo. Pak můžeme přepsat $K_{m-2,m}$ na $K_{2t-1,2t+1}$.

$$\begin{aligned} n &= 2t - 1 + 2t + 1 = 4t \\ n(n+1) &\equiv 0 \pmod{4} \\ 4t(4t+1) &\equiv 0 \pmod{4} \end{aligned} \tag{5}$$

Podmínka dělitelnosti (5) platí pro každé liché m .

- $\sum_{j=1}^{s_i} (n+1-j) \geq \frac{in(n+1)}{2p}$ pro $1 \leq i \leq p$

Vyřešíme nerovnici pro $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m-2} (2m-2+1-j) &\geq \frac{(2m-2)(2m-1)}{4} \\
\sum_{j=1}^{m-2} (2m-2+1) - \sum_{j=1}^{m-2} j &\geq \frac{(m-1)(2m-1)}{2} \\
(m-2)(2m-1) - \sum_{j=1}^{m-2} j &\geq \frac{(m-1)(2m-1)}{2} \\
m^2 - 4m + 1 &\geq 0
\end{aligned}$$

Nerovnice má kladná řešení na intervalu $m \in \langle 4, \infty \rangle$.

Vyřešíme nerovnici pro $i = 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2m-2} (2m-2+1-j) &\geq \frac{2(2m-2)(2m-1)}{4} \\
\sum_{j=1}^{2m-2} (2m-2+1) - \sum_{j=1}^{2m-2} j &\geq (m-1)(2m-1) \\
(2m-2)(2m-1) - \sum_{j=1}^{2m-2} j &\geq (m-1)(2m-1) \\
(2m-2)(2m-1) - \frac{(2m-2)(2m-1)}{2} &\geq (m-1)(2m-1) \\
\frac{(2m-2)(2m-1)}{2} &\geq (m-1)(2m-1) \\
(m-1)(2m-1) &\geq (m-1)(2m-1)
\end{aligned}$$

Nerovnice je vždy splněna.

Všechny předpoklady jsou splněny, existuje tedy distance magic labeling grafu $K_{m-2,m}$, kde m je liché a $m \geq 4$. Nepravidelné grafy, pro které existuje distance magic labeling a neexistuje degree-distance magic labeling, jsou $K_{m-2,m}$, kde m je liché a $m \geq 4$.

Nyní se pokusme najít nekonečně mnoho nepravidelných grafů, pro které existuje distance magic labeling i degree-distance magic labeling.

Zkusme například grafy $K_{m-1,m}$, kde m je sudé a $m \geq 2$. Z Věty 3.16 víme, že degree-distance magic labeling grafu $K_{m-1,m}$ existuje. Musíme ověřit podmínky Věty 3.14, abychom zjistili, zda $K_{m-1,m}$ má distance magic labeling.

- $a_2 \geq 2$

Podmínka $m \geq 2$ jistě platí, nejmenší možný graf je $K_{1,2}$.

- $n(n+1) \equiv 0 \pmod{2p}$, kde $n = s_p = |V(H_{a_1, \dots, a_p})|$

Označme si $m = 2t$, kde t je přirozené číslo. Pak můžeme přepsat $K_{m-1,m}$ na $K_{2t-1,2t}$.

$$\begin{aligned} n &= 2t - 1 + 2t = 4t - 1 \\ n(n+1) &\equiv 0 \pmod{4} \\ (4t-1)(4t-1+1) &\equiv 0 \pmod{4} \\ (4t-1)4t &\equiv 0 \pmod{4} \end{aligned} \tag{6}$$

Podmínka dělitelnosti (6) platí pro každé sudé m .

- $\sum_{j=1}^{s_i} (n+1-j) \geq \frac{in(n+1)}{2p}$ pro $1 \leq i \leq p$

Vyřešíme nerovnici pro $i = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m-1} (2m-1+1-j) &\geq \frac{(2m-1)(2m-1+1)}{4} \\ \sum_{j=1}^{m-1} 2m - \sum_{j=1}^{m-1} j &\geq \frac{(2m-1)m}{2} \\ (m-1)2m - \sum_{j=1}^{m-1} j &\geq \frac{(2m-1)m}{2} \\ (m-1)4m - m(m-1) &\geq (2m-1)m \\ m^2 - 2m &\geq 0 \end{aligned}$$

Nerovnice má kladná řešení na intervalu $m \in (2, \infty)$.

Vyřešíme nerovnici pro $i = 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2m-1} (2m-1+1-j) &\geq \frac{2(2m-1)(2m-1+1)}{4} \\
\sum_{j=1}^{2m-1} 2m - \sum_{j=1}^{2m-1} j &\geq m(2m-1) \\
(2m-1)2m - \sum_{j=1}^{2m-1} j &\geq m(2m-1) \\
4m^2 - 2m - 2m^2 + m &\geq 2m^2 - m \\
4m^2 - 2m &\geq 4m^2 - 2m
\end{aligned}$$

Nerovnice je vždy splněna.

Všechny předpoklady jsou splněny, existuje tedy distance magic labeling i degree-distance magic labeling grafu $K_{m-1,m}$, kde m je sudé a $m \geq 2$. Nepravidelné grafy, pro které existuje distance magic labeling i degree-distance magic labeling, jsou $K_{m-1,m}$, kde m je sudé a $m \geq 2$.

Problém 3.17. Existuje graf, pro který existuje degree-distance magic labeling a neexistuje distance magic labeling?

Odpověď na tento problém dá Věta 3.14 s Větou 3.16.

Věta 3.18. Pro graf $K_{2,n}$, kde $n \in \mathbb{N} : n \geq 5$, existuje degree-distance magic labeling a neexistuje distance magic labeling.

Důkaz. Pro distance magic graf $K_{2,n}$ platí, že součty v obou partitách si jsou rovny. Vrcholy grafu $K_{2,n}$ zobrazujeme na čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n, n+1, n+2\}$, celkový počet vrcholů je $n+2$. Pokud bychom chtěli sestavit distance magic graf $K_{2,n}$, budeme muset v partitě se dvěma vrcholy použít co nejvyšší čísla.

Chceme najít takové přirozené číslo n , pro které platí, že součet čísel $(n+2)$ a $(n+1)$ je menší než součet čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}
(n+2) + (n+1) &< \frac{(1+n)n}{2} \\
4n+6 &< n^2+5n+6 \\
-n^2+3n+6 &< 0
\end{aligned}$$

Kvadratická nerovnice má kladné řešení pouze pro $n \in \langle 1, 4 \rangle$. Tedy pro $n \geq 5$ neexistuje distance magic labeling grafu $K_{2,n}$. \square

Poznámka. Výše uvedený důkaz bychom mohli obdobně použít na kompletní bipartitní grafy $K_{m,n+m}$, kde jedna partita bude obsahovat tak málo vrcholů, aby neexistoval distance magic labeling daného grafu $K_{m,n+m}$. Chtěli bychom najít takové přirozené číslo n , pro které platí, že součet čísel z množiny $\{(n+1), (n+2), \dots, (n+m)\}$ je menší než součet čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Musíme však vzít v potaz Větu 3.16 o existenci degree-distance magic labelingu pro kompletní bipartitní grafy $K_{m,n}$.

$$\begin{aligned}
(n+m) + \dots + (n+2) + (n+1) &< \frac{(1+n)n}{2} \\
\frac{((n+1) + (n+m))m}{2} &< \frac{(1+n)n}{2} \\
-n^2 + m^2 + 2nm - n + m &< 0 \\
-n^2 + (2m-1)n + (m^2 + m)1 &< 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Vyřešíme kvadratickou nerovnici (7) s parametrem m .

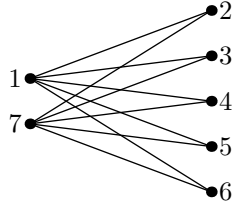
$$\begin{aligned}
D &= (2m-1)^2 + 4(m^2 + m) \\
D &= 8m^2 + 1
\end{aligned}$$

Diskriminant je kladný při libovolném parametru m . Kvadratická nerovnice má dva kořeny x_1 a x_2 .

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-(2m-1) + \sqrt{8m^2 + 1}}{-2} \\
x_2 &= \frac{-(2m-1) - \sqrt{8m^2 + 1}}{-2}
\end{aligned}$$

Zajímá nás množina řešení $\langle \lceil \max(x_1, x_2) \rceil, \infty \rangle$. Jestliže máme zadaný parametr m , pak vypočítáme, jaké musí být minimálně n , aby pro graf $K_{m,n+m}$ neexistoval distance magic labeling.

Příklad 3.19. Sestrojme pro graf $K_{2,5}$ degree-distance magic labeling.

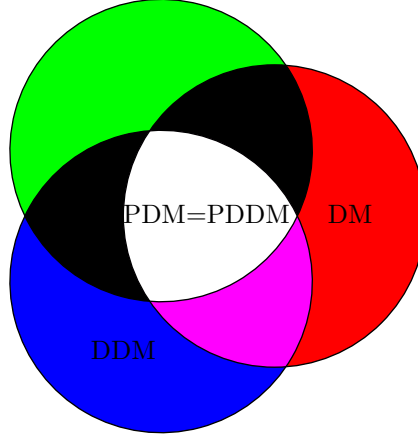


Obrázek 21: Degree-distance magic labeling grafu $K_{2,5}$.

Všimněme si, že distance magic labeling grafu $K_{2,5}$ opravdu neexistuje, jelikož součet dvou nejvyšších čísel je 13 a součet zbývajících čísel je 15. Součet ohodnocení

v partitě s dvěma vrcholy nikdy nebude roven součtu ohodnocení v partitě s pěti vrcholy.

3.3.1 Znázornění distance magic grafů a degree-distance magic grafů



Obrázek 22: Znázornění DM, DDM, PDM a PDDM grafů Vennovým diagramem.

Množiny distance magic grafů, degree-distance magic grafů a pravidelných grafů jsou znázorněny na obrázku 22. Množiny znázorněné černou barvou ve Vennově diagramu neobsahují žádné grafy a jsou prázdné. Neexistuje totiž takový pravidelný graf, který by měl buď pouze distance magic labeling nebo pouze degree-distance magic labeling, protože pravidelný graf má podle Věty 3.12 buď současně distance magic labeling i degree-distance magic labeling nebo ani jeden labeling.

Víme, že množina pravidelných degree-distance magic grafů (PDDM) je vlastní podmnožina degree-distance magic grafů (DDM) a množina pravidelných distance magic grafů (PDM) je vlastní podmnožina distance magic grafů (DM).

Množina všech pravidelných grafů je znázorněna zelenou barvou ve Vennově diagramu. Z Věty 3.12 víme, že množina pravidelných distance magic grafů (PDM) je totožná s množinou pravidelných degree-distance magic grafů (PDDM). Známe nekonečně mnoho pravidelných grafů, které mají distance magic labeling a zároveň degree-distance magic labeling. Například z Věty 3.6 víme, že grafy $C_n[\overline{K_m}]$, kde $n \in \mathbb{N} \wedge n \equiv 0 \pmod{4}$ a $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \wedge m \equiv 1 \pmod{2}$ jsou pravidelné grafy a mají distance magic labeling i degree-distance magic labeling.

Z Věty 3.16 víme, že degree-distance magic labeling grafu $K_{m,n}$ neexistuje právě tehdy, jestliže je m a n liché. V ostatních případech známe degree-distance magic

labeling grafu $K_{m,n}$.

Pravidelné grafy, které nemají distance magic labeling ani degree-distance magic labeling, jsou znázorněny **zelenou** barvou ve Vennově diagramu. Jsou to například cykly C_n (pro $n \neq 4$) a kompletní grafy K_n (pro $n > 1$), na základě Věty 3.13.

Množina grafů, které mají distance magic labeling i degree-distance magic labeling a nejsou pravidelné, je znázorněna **fialovou** barvou ve Vennově diagramu. Jsou to například grafy $K_{m-1,m}$, kde m je sudé a $m \geq 2$, což je dokázáno na straně 35 na základě Věty 3.14 a Věty 3.16.

Množina grafů, které mají pouze distance magic labeling a nejsou pravidelné, je znázorněna **červenou** barvou ve Vennově diagramu. Jsou to například grafy $K_{m-2,m}$, kde m je liché a $m \geq 4$, což je dokázáno na straně 34 na základě Věty 3.14 a Věty 3.16.

Množina grafů, které mají pouze degree-distance magic labeling a nejsou pravidelné, je znázorněna **modrou** barvou ve Vennově diagramu. Jsou to například grafy $K_{2,m}$, kde $m \geq 5$, což je dokázáno na základě Věty 3.18.

3.4 Další konstrukce degree-distance magic grafů

3.4.1 Degree-distance magic labeling a grafové spojení

Další možnost konstrukce degree-distance magic grafu je, že grafové kompozici $G[\overline{K_m}]$, kde G je pravidelný graf a m je sudé přirozené číslo, přidáme nový vrchol, který bude hranou spojený s každým vrcholem grafové kompozice $G[\overline{K_m}]$. Spojení grafu $G[\overline{K_m}]$ a vrcholu x značíme $G[\overline{K_m}] \vee x$, kde x je vrchol, který ke grafu $G[\overline{K_m}]$ přidáme a spojíme jej hranou s každým vrcholem $G[\overline{K_m}]$.

Věta 3.20. Mějme pravidelný graf $G = (V, E)$ a grafovou kompozici $G[\overline{K_m}]$, kde m je sudé přirozené číslo. Potom graf $G[\overline{K_m}] \vee x$ je degree-distance magic graf.

Důkaz. Důkaz si rozdělíme do dvou částí. V první části se budeme zabývat grafovou kompozicí $G[\overline{K_m}]$ pravidelného grafu G a ve druhé části ukážeme, že graf $G[\overline{K_m}] \vee x$ má degree-distance magic labeling. Nejprve si označme:

- i) $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vrcholy pravidelného grafu G ,
- ii) r jako stupeň pravidelnosti grafu G ,
- iii) $V(\overline{K_m}) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ vrcholy grafu $\overline{K_m}$.

- I) Kompozici $G[\overline{K_m}]$ ohodnotíme tak, že číslo i a $(mn + 1 - i)$ je vždy ve stejné kopii $\overline{K_m}$, součet těchto dvou čísel je $(mn + 1)$ a v každé kopii $\overline{K_m}$ je právě $m/2$ takových dvojic. Součet ohodnocení vrcholů v jedné kopii $\overline{K_m}$ grafové kompozice $G[\overline{K_m}]$ je

$$\frac{m}{2}(1 + mn).$$

Pro vyjádření váhy obecného vrcholu (u_i, v_s) , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ musíme součet ohodnocení vrcholů jedné kopie $\overline{K_m}$ vynásobit stupněm pravidelnosti grafu G a vydělit stupněm pravidelnosti grafové kompozice $G[\overline{K_m}]$, který můžeme psát jako mr .

$$w(u_i, v_s) = \frac{\frac{(1+mn)m}{2} \deg_G u_i}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s)} = \frac{\frac{(1+mn)m}{2} r}{mr} = \frac{1 + mn}{2}$$

- II) Po spojení grafů $G[\overline{K_m}] \vee x$ má graf $(mn+1)$ vrcholů. Vrcholům grafu $G[\overline{K_m}] \vee x$ přiřadíme čísla z množiny

$$\left\{1, 2, \dots, \frac{mn}{2} + 1, \dots, mn + 1\right\}.$$

Číslo $(mn/2 + 1)$ přiřadíme vrcholu x . Čísla i a $(mn + 2 - i)$ jsou vždy ve stejné kopii $\overline{K_m}$, součet těchto dvou čísel je $(mn + 2)$ a v každé kopii $\overline{K_m}$ je právě $m/2$ takových dvojic. Součet ohodnocení vrcholů v jedné kopii $\overline{K_m}$ grafového spojení $G[\overline{K_m}] \vee x$ je

$$\frac{m}{2}(2 + mn).$$

Vypočítejme váhu obecného vrcholu (u_i, v_s) náležícího podgrafu $G[\overline{K_m}]$ neboli váhu vrcholů různých od x , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $s \in \{1, 2, \dots, m\}$. Součet ohodnocení jedné kopie $\overline{K_m}$ vynásobíme stupněm pravidelnosti grafu G , přičteme ohodnocení vrcholu x a vydělíme stupněm vrcholu, který je $(mr + 1)$ pro všechny vrcholy podgrafu $G[\overline{K_m}]$.

$$\begin{aligned} w(u_i, v_s) &= \frac{\frac{(2+mn)m}{2} \deg_G u_i + (\frac{mn}{2} + 1)}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s) + 1} = \frac{\frac{(2+mn)m}{2} r + (\frac{mn}{2} + 1)}{mr + 1} = \\ &= \frac{\frac{(2+mn)m}{2} r + \frac{2+mn}{2}}{mr + 1} = \frac{\frac{2+mn}{2}(mr + 1)}{mr + 1} = \frac{2 + mn}{2} \end{aligned}$$

Vypočítejme také váhu vrcholu x . Vrchol x má stupeň mn , protože z něj vede hrana do každého vrcholu podgrafu $G[\overline{K_m}]$. Součet ohodnocení všech ostatních vrcholů vydělíme stupněm vrcholu x .

$$w(x) = \frac{\frac{(2+mn)}{2}mn}{mn} = \frac{2+mn}{2}$$

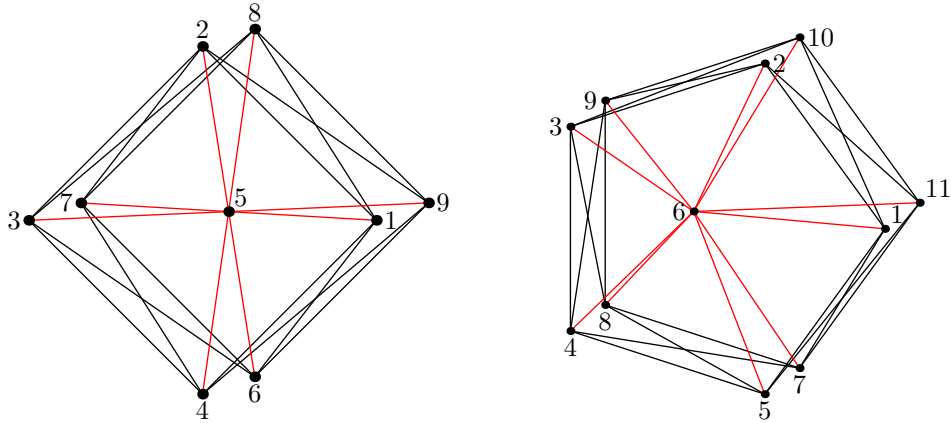
Váha vrcholu x je rovna váze všech ostatních vrcholů náležících podgrafu $G[\overline{K_m}]$. Výsledný graf $G[\overline{K_m}] \vee x$ má degree-distance magic labeling. \square

Příklad 3.21. Sestrojme pro graf $C_4[\overline{K_2}] \vee x$ degree-distance magic labeling. Použijme takovou liftovanou Kotzigovu matici \tilde{M} , která má tu vlastnost, že čísla i a $(mn+2-i)$ jsou v jednom sloupci, dále bude obsahovat čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 5, \dots, 8, 9\} \setminus 5$, protože číslo 5 rezervujeme pro vrchol x , a proto v liftované Kotzigově matici není.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Sestrojme pro graf $C_5[\overline{K_2}] \vee x$ degree-distance magic labeling. Použijme takovou liftovanou Kotzigovu matici \tilde{M} , která má tu vlastnost, že čísla i a $(mn+2-i)$ jsou v jednom sloupci, dále bude obsahovat čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 6, \dots, 10, 11\} \setminus 6$, protože číslo 6 rezervujeme pro vrchol x , a proto v liftované Kotzigově matici není.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$



Obrázek 23: Degree-distance magic labeling grafu $C_4[\overline{K_2}] \vee x$ a $C_5[\overline{K_2}] \vee x$.

Dále můžeme uvažovat, že bychom vrchol x spojili pouze s několika kopiemi grafu $\overline{K_m}$. Označme přirozené číslo c , pro které platí, že $c < n$, kde n je řád grafu G . Vrchol x bychom spojili se všemi vrcholy z c kopií grafu $\overline{K_m}$, dostaneme graf J a stupeň vrcholu $\deg_J x = mc$.

Věta 3.22. Mějme pravidelný graf $G = (V, E)$ a grafovou kompozici $G[\overline{K_m}]$, kde m je sudé přirozené číslo. Označme číslo $c : c \in \mathbb{N} \wedge c < n$, kde n je řád grafu G . Jestliže přidáme do grafu vrchol x tak, že bude hranou spojený se všemi vrcholy z c kopií grafu $\overline{K_m}$, dostaneme graf J a stupeň vrcholu $\deg_J x = mc$. Výsledný graf J bude degree-distance magic graf.

Důkaz Věty 3.22 vychází z důkazu Věty 3.20, budeme tedy vycházet z pojmů zavedených v důkazu Věty 3.20.

Důkaz. Konstrukce ohodnocení je stejná jako v důkazu Věty 3.20. Číslo $(mn/2 + 1)$ opět přiřadíme vrcholu x . Pokud vrchol náležící podgrafu $G[\overline{K_m}]$ sousedí s vrcholem x , pak jeho váhu vypočítáme následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} w(u_i, v_s) &= \frac{\frac{(2+mn)m}{2} \deg_G u_i + (\frac{mn}{2} + 1)}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s) + 1} = \frac{\frac{(2+mn)m}{2} r + (\frac{mn}{2} + 1)}{mr + 1} = \\ &= \frac{\frac{(2+mn)m}{2} r + \frac{2+mn}{2}}{mr + 1} = \frac{\frac{2+mn}{2}(mr + 1)}{mr + 1} = \frac{2 + mn}{2} \end{aligned}$$

Pokud vrchol náležící podgrafu $G[\overline{K_m}]$ nesousedí s vrcholem x , pak jeho váhu vypočítáme následujícím způsobem.

$$w(u_i, v_s) = \frac{\frac{(2+mn)m}{2} \deg_G u_i}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s)} = \frac{\frac{(2+mn)m}{2} r}{mr} = \frac{2 + mn}{2}$$

Vrchol x má stupeň $\deg_J x = mc$, protože z něj vede mc hran do celkově c kopií $G[\overline{K_m}]$.

$$w(x) = \frac{\frac{(2+mn)}{2} mc}{mc} = \frac{2 + mn}{2}$$

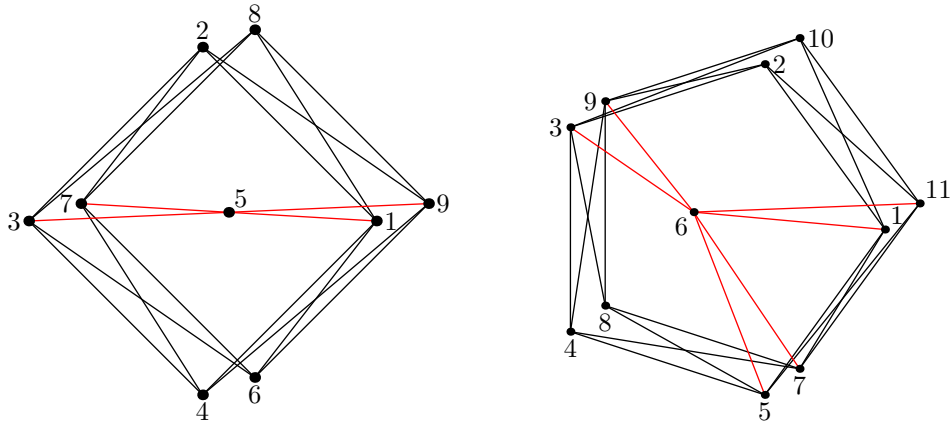
Váha vrcholu x je rovna váze všech ostatních vrcholů náležících podgrafu $G[\overline{K_m}]$. Výsledný graf J má degree-distance magic labeling. \square

Příklad 3.23. Sestrojme degree-distance magic labeling pro graf $C_4[\overline{K_2}]$ s přidaným vrcholem x a čtyřmi hranami, kde vrchol x bude stupně 4. Použijme takovou liftovanou Kotzigovu matici \hat{M} , která má tu vlastnost, že čísla i a $(mn + 2 - i)$ jsou v jednom sloupci, dále bude obsahovat čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 5, \dots, 8, 9\} \setminus 5$, protože číslo 5 rezervujeme pro vrchol x , a proto v liftované Kotzigově matici není.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Sestrojíme degree-distance magic labeling pro graf $C_5[\overline{K_2}]$ s přidaným vrcholem x a šesti hranami, kde vrchol x bude stupně 6. Použijme takovou liftovanou Kotzigovu matici \tilde{M} , která má tu vlastnost, že čísla i a $(mn + 2 - i)$ jsou v jednom sloupci, dále bude obsahovat čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 6, \dots, 10, 11\} \setminus 6$, protože číslo 6 rezervujeme pro vrchol x , a proto v liftované Kotzigově matici není.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$



Obrázek 24: Degree-distance magic labeling grafu $C_4[\overline{K_2}] \vee x$ a $C_5[\overline{K_2}] \vee x$.

Věta 3.24. Mějme pravidelný graf $G = (V, E)$ řádu n , grafovou kompozici $G[\overline{K_m}]$, kde m je sudé přirozené číslo a graf $H = (V, E)$ řádu p tvořený izolovanými vrcholy. Potom graf $G[\overline{K_m}] \vee H$ je degree-distance magic graf.

Důkaz Věty 3.24 vychází z důkazu Věty 3.20, budeme tedy vycházet z pojmů zavedených v důkazu Věty 3.20.

Důkaz. Po spojení grafů $G[\overline{K_m}] \vee H$ má graf $(mn + p)$ vrcholů. Vrcholům grafu $G[\overline{K_m}] \vee H$ přiřadíme čísla z následující množiny, barevně odlišíme hodnoty přiřazené vrcholům grafu H .

$$\left\{ 1, 2, \dots, \frac{mn}{2}, \quad \frac{mn}{2} + 1, \frac{mn}{2} + 2, \dots, \frac{mn}{2} + p, \quad \frac{mn}{2} + p + 1, \frac{mn}{2} + p + 2, \dots, mn + p \right\}$$

Čísla z množiny $\{mn/2 + 1, mn/2 + 2, \dots, mn/2 + p\}$ přiřadíme vrcholům grafu H . Stačí dodržet jednoduché pravidlo, aby čísla i a $(mn + p + 1 - i)$ byla vždy ve stejné kopii $\overline{K_m}$, součet těchto dvou čísel je $(mn + p + 1)$ a v každé kopii $\overline{K_m}$ je právě $m/2$ takových dvojic. Součet ohodnocení v jedné kopii $\overline{K_m}$ grafového spojení $G[\overline{K_m}] \vee H$ je

$$\frac{m}{2}(i + mn + p + 1 - i) = \frac{m}{2}(mn + p + 1).$$

Vypočítejme váhu obecného vrcholu (u_i, v_s) náležícího podgrafu $G[\overline{K_m}]$ neboli vrcholů nenáležících množině vrcholů $V(H)$, kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $s \in \{1, 2, \dots, m\}$. Součet ohodnocení jedné kopie $\overline{K_m}$ vynásobíme stupněm pravidelnosti grafu G , přičteme součet ohodnocení vrcholů grafu H a vydělíme stupněm vrcholu, který je $(mr + p)$ pro všechny vrcholy podgrafu $G[\overline{K_m}]$.

$$\begin{aligned} w(u_i, v_s) &= \frac{\frac{(mn+p+1)m}{2} \deg_G u_i + \sum_{i=1}^p \left(\frac{mn}{2} + i\right)}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s) + p} = \frac{\frac{(mn+p+1)m}{2} \deg_G u_i + \frac{(mn+p+1)p}{2}}{\deg_{G[\overline{K_m}]}(u_i, v_s) + p} = \\ &= \frac{\frac{(mn+p+1)m}{2}r + \frac{(mn+p+1)p}{2}}{mr + p} = \frac{\frac{(mn+p+1)}{2}(mr + p)}{mr + p} = \frac{mn + p + 1}{2} \end{aligned}$$

Vypočítejme také váhu libovolného vrcholu grafu H . Vrcholy grafu H mají stupeň mn , protože z nich vede hrana do každého vrcholu podgrafu $G[\overline{K_m}]$.

$$w(x) = \frac{\frac{m}{2}(mn + p + 1)n}{mn} = \frac{mn + p + 1}{2}$$

Váha vrcholů grafu H je rovna váze všech ostatních vrcholů podgrafu $G[\overline{K_m}]$. Výsledný graf $G[\overline{K_m}] \vee H$ má degree-distance magic labeling. \square

Navažme na důkaz Věty 3.24. Jestliže graf H je lichého řádu, pak existuje vrchol y s labelem $(mn + p + 1)/2$. Čísla z množiny $\{mn/2 + 1, mn/2 + 2, \dots, mn/2 + p\}$ přiřadíme vrcholům grafu H . Ohodnocení vrcholů grafu H má vlastnost, že dvojice vrcholů s labely $(mn/2 + i)$ a $(mn/2 + (p - i + 1))$ má součet labelů $(mn + p + 1)$, kde $i \in \{1, 2, \dots, (p - 1)/2\}$. Libovolný počet takových dvojic vrcholů můžeme spojit s vrcholem y .

Označme libovolný vrchol grafu H , který nemá label $(mn + p + 1)/2$, jako x . Vypočítejme váhu vrcholu x z takové dvojice vrcholů, kterou jsme spojili s vrcholem y . Jestliže původně byla váha vrcholu x rovna $(mn + p + 1)/2$, pak vynásobením stupněm vrcholu dá součet ohodnocení sousedů vrcholu x . Po spojení s vrcholem y se stupeň vrcholu x zvýšil o jedna a součet ohodnocení sousedů vrcholu x se zvýšil o $(mn + p + 1)/2$.

$$w(x) = \frac{\frac{(mn+p+1)}{2}mn + \frac{(mn+p+1)}{2}}{mn+1} = \frac{mn+p+1}{2}$$

Musíme ověřit, zda váha vrcholu y zůstala stejná. Jestliže původně byla váha vrcholu y rovna $(mn+p+1)/2$, pak vynásobení stupněm vrcholu dá součet ohodnocení sousedů vrcholu y . Po spojení s dvojicí vrcholů se stupeň vrcholu y zvýšil o dva a součet ohodnocení sousedů se zvýšil o $(mn+p+1)$.

$$w(y) = \frac{\frac{(mn+p+1)}{2}mn + (mn+p+1)}{mn+2} = \frac{mn+p+1}{2}$$

Příklad 3.25. Sestrojme pro graf $C_4[\overline{K_2}] \vee H$ degree-distance magic labeling, kde graf H je řádu $p = 5$ a obsahuje pouze izolované vrcholy. Použijme takovou liftovanou Kotzigovu matici \tilde{M} , která má tu vlastnost, že čísla i a $(mn+p+1-i)$ jsou v jednom sloupci, dále bude obsahovat čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 7, \dots, 12, 13\} \setminus \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Čísla 5 až 9 rezervujeme pro vrcholy grafu H , a proto v liftované Kotzigově matici nejsou. Graf $C_4[\overline{K_2}] \vee H$ je na obrázku 25 vlevo.

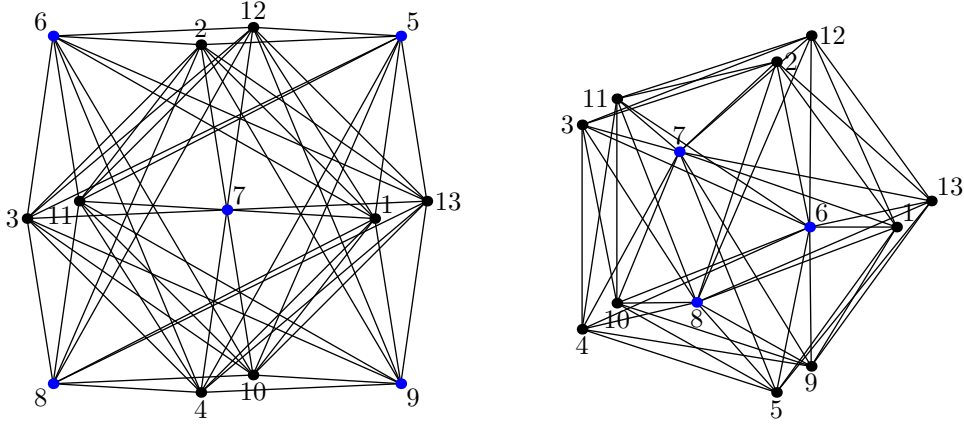
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Sestrojme pro graf $C_5[\overline{K_2}] \vee H$ degree-distance magic labeling, kde graf H je řádu $p = 3$ a obsahuje pouze izolované vrcholy. Použijme takovou liftovanou Kotzigovu matici \tilde{M} , která má tu vlastnost, že čísla i a $(mn+p+1-i)$ jsou v jednom sloupci, dále bude obsahovat čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 7, \dots, 12, 13\} \setminus \{6, 7, 8\}$. Čísla 6 až 8 rezervujeme pro vrcholy grafu H , a proto v liftované Kotzigově matici nejsou. Graf $C_5[\overline{K_2}] \vee H$ je na obrázku 25 vpravo.

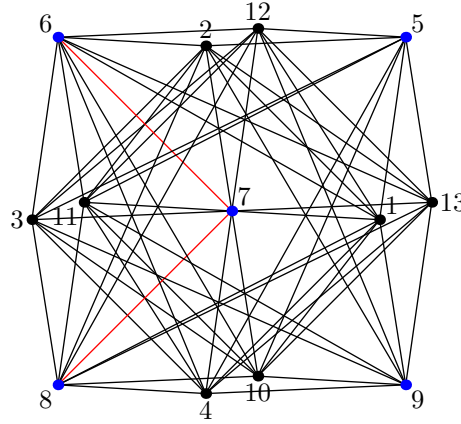
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Příklad 3.26. Sestrojme pro graf $C_4[\overline{K_2}] \vee H$ degree-distance magic labeling, kde graf H je řádu $p = 5$ a obsahuje pouze izolované vrcholy, navíc vrchol s labelem $(mn+p+1)/2$ bude mít stupeň 10. Použijme takovou liftovanou Kotzigovu matici \tilde{M} , která má tu vlastnost, že čísla i a $(mn+p+1-i)$ jsou v jednom sloupci, dále bude obsahovat čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 7, \dots, 12, 13\} \setminus \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Čísla 5 až 9 rezervujeme pro vrcholy grafu H , a proto v liftované Kotzigově matici nejsou. Graf $C_4[\overline{K_2}] \vee H$ je na obrázku 26.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



Obrázek 25: Degree-distance magic labeling grafu $C_4[\overline{K_2}] \vee H$ a grafu $C_5[\overline{K_2}] \vee H$.



Obrázek 26: Degree-distance magic labeling grafu $C_4[\overline{K_2}] \vee H$.

Z vrcholu s labelem $(mn + p + 1)/2$ vychází dvě hrany do dvojice vrcholů, které byly původně součástí grafu H . Tato dvojice vrcholů má součet labelů $(mn + p + 1)$, mohli jsme tedy vrchol s labelem $(mn + p + 1)/2$ hranou spojit s takovou dvojicí vrcholů. Platnost tohoto tvrzení je ukázána na straně 45.

Poznámka. V Příkladě 3.25 si můžeme všimnout, že graf $C_4[\overline{K_2}] \vee H$ a graf $C_5[\overline{K_2}] \vee H$ obsahuje mnoho takových cyklů C_4 , které můžeme pomocí Věty 3.30 odebrat.

3.4.2 Degree-distance magic labeling a přidávání hran

V průběhu psaní této bakalářské práce byl formulován otevřený problém, zda magická konstanta degree-distance magic grafu G na n vrcholech je $k = (n + 1)/2$.

Tento otevřený problém byl jedním z hlavních témat jednoho matematického semináře DIMAS a následně problém vyřešili Prof. Zdeněk Dostál a Doc. Petr Kovář.

Věta 3.27 je citována z textu [4].

Věta 3.27. Nechť G je degree-distance magic graf řádu n . Magická konstanta grafu G je $k = (n + 1)/2$.

Uveďme si důkaz Věty 3.27, který je citován z textu [4].

Důkaz. Nechť f je jakýkoliv degree-distance magic labeling grafu G , A je matice sousednosti grafu G a D je diagonální matice, kde prvek na hlavní diagonále d_i je roven $1/\deg(i)$. Nechť \vec{x} je vektor rozměru $(n, 1)$ obsahující labely vrcholů.

$$\vec{x} = (\deg(1), \deg(2), \dots, \deg(n))^T$$

Jelikož f je degree-distance magic labeling grafu G s magickou konstantou k , pak platí $\vec{x}^T DA = k \vec{u}^T$, kde \vec{u} je jedničkový vektor rozměru $(n, 1)$.

Uvědomme si, že $DA\vec{u} = \vec{u}$, protože $A\vec{u}$ je vektor $(\deg(1), \deg(2), \dots, \deg(n))^T$.

$$\begin{aligned} k \vec{u}^T &= \vec{x}^T DA \\ k \vec{u}^T \vec{u} &= \vec{x}^T DA \vec{u} = \vec{x}^T \vec{u} \\ k(1 + 1 + \dots + 1) &= (1 + 2 + \dots + n) = n(n + 1)/2 \\ k &= (n + 1)/2 \end{aligned}$$

□

Věta 3.28. Nechť $G = (V, E)$ je degree-distance magic graf řádu n s magickou konstantou k . C_4 je cyklus, kde vrcholy mají labely z množiny $\{i, j, n+1-i, n+1-j\}$, pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a součet labelů nezávislých vrcholů cyklu C_4 je $(n + 1)$. Jestliže ztotožníme vrcholy grafu G a cyklu C_4 příslušných labelů a žádná hrana se při ztotožnění nezopakuje, pak výsledný graf je degree-distance magic graf.

Důkaz. Degree-distance magic graf G má magickou konstantu $k = (n + 1)/2$. C_4 je cyklus, kde vrcholy mají labely z množiny $\{i, j, n + 1 - i, n + 1 - j\}$, pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a součet labelů nezávislých vrcholů cyklu je $(n + 1)$. Váha se nezmění vrcholům, kterým zůstal, po ztotožnění vrcholů grafu G a cyklu C_4 , stejný stupeň. Stupeň čtyř vrcholů se zvýšil o dva a musíme ověřit, jestli se nezměnila váha těchto vrcholů.

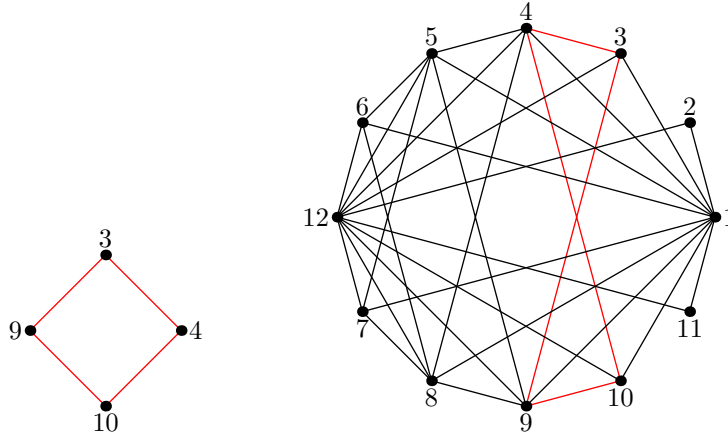
Jestliže původně byla váha vrcholu rovna $(n + 1)/2$, pak vynásobení váhy vrcholu stupněm vrcholu $\deg_G(v_i)$ nám dá součet ohodnocení sousedů vrcholu v_i . Po

ztotožnění vrcholů grafu G a cyklu C_4 se stupeň vrcholu v_i zvýšil o dva a součet ohodnocení sousedů se zvýšil o $(n + 1)$.

$$w(v_i) = \frac{\frac{(n+1)}{2} \deg_G(v_i) + (n+1)}{\deg_G(v_i) + 2} = \frac{(n+1)(\frac{\deg_G(v_i)}{2} + 1)}{2(\frac{\deg_G(v_i)}{2} + 1)} = \frac{n+1}{2}$$

Váha vrcholu, kterému jsme přidali dvě hrany, zůstala stejná. Výsledný graf je degree-distance magic graf.

Příklad 3.29. Přidejme do degree-distance magic grafu G řádu $n = 12$ cyklus C_4 tak, aby výsledný graf byl degree-distance magic graf. Všimněme si, že nezávislé vrcholy cyklu C_4 mají součet $(n + 1) = 13$. Na obrázku 27 je znázorněno přidání cyklu C_4 .



Obrázek 27: Graf G s přidaným cyklem C_4 .

Věta 3.30. Necht' $G = (V, E)$ je degree-distance magic graf řádu n s magickou konstantou k . C_4 je cyklus grafu G , kde vrcholy mají labely z množiny $\{i, j, n + 1 - i, n + 1 - j\}$, pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a součet labelů nezávislých vrcholů je $(n + 1)$. Jestliže z grafu G odebereme cyklus C_4 a graf G zůstane souvislý, pak výsledný graf je degree-distance magic graf.

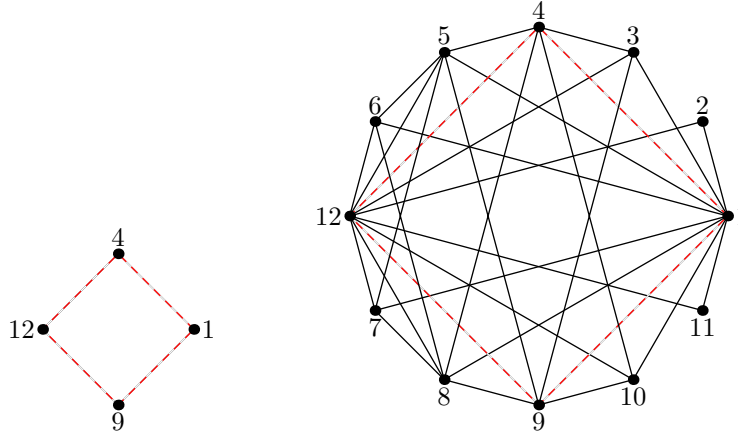
Důkaz. Degree-distance magic graf G má magickou konstantu $k = (n + 1)/2$. C_4 je cyklus, kde vrcholy mají labely z množiny $\{i, j, n + 1 - i, n + 1 - j\}$, pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a součet labelů nezávislých vrcholů je $(n + 1)$. Váha se nezmění vrcholům, kterým zůstal, po odebrání hran cyklu C_4 z grafu G , stejný stupeň. Stupeň vrcholu se u čtyř vrcholů snížil o dva a musíme ověřit, jestli se nezměnila váha vrcholu.

Jestliže původně byla váha vrcholu rovna $(n+1)/2$, pak vynásobení váhy vrcholu stupněm vrcholu $\deg_G(v_i)$ nám dá součet ohodnocení sousedů vrcholu v_i . Po odebrání hran cyklu C_4 z grafu G se stupeň vrcholu v_i snížil o dva a součet ohodnocení sousedů se snížil o $(n+1)$.

$$w(v_i) = \frac{\frac{(n+1)}{2} \deg_G(v_i) - (n+1)}{\deg_G(v_i) - 2} = \frac{(n+1)(\frac{\deg_G(v_i)}{2} - 1)}{2(\frac{\deg_G(v_i)}{2} - 1)} = \frac{n+1}{2}$$

Váha vrcholu, kterému jsme ubrali dvě hrany, zůstala stejná. Jedná se o degree-distance magic graf.

Příklad 3.31. Odeberme z degree-distance magic grafu G řádu $n = 12$ cyklus C_4 tak, aby výsledný graf byl degree-distance magic graf. Všimněme si, že nezávislé vrcholy cyklu C_4 mají součet $(n+1) = 13$. Na obrázku 28 je znázorněno odebrání cyklu C_4 z grafu G .



Obrázek 28: Odebrání cyklu C_4 z grafu G .

Z platnosti Věty 3.28 a Věty 3.30 můžeme vyvodit následující tvrzení.

Důsledek 3.32. Necht' $G = (V, E)$ je graf řádu n a C_4 je cyklus grafu G , kde vrcholy mají labely z množiny $\{i, j, n+1-i, n+1-j\}$, pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a součet labelů nezávislých vrcholů je $(n+1)$. Graf G je degree-distance magic graf právě tehdy, jestliže graf $G - C_4$ je degree-distance magic graf.

Když jsme do degree-distance magic grafu $G = (V, E)$ řádu n přidávali cyklus C_4 , ztotožnili jsme vrcholy grafu G a cyklu C_4 příslušných labelů tak, aby zůstala

magická konstanta $(n+1)/2$. O cyklu C_4 můžeme také uvažovat jako o jiném degree-distance magic grafu $H = (V, E)$. Pro takový graf H bude platit, že je stejného řádu jako graf G , může obsahovat izolované vrcholy a má magickou konstantu $(n+1)/2$.

Izolovaný vrchol má součet ohodnocení sousedů a stupeň vrcholu roven nule. U degree-distance magic labelingu váhu izolovaného vrcholu nebudeme určovat, protože bychom dělili nulou. Pro následující text povolíme existenci izolovaných vrcholů v degree-distance magic grafech.

Věta 3.33. Necht' $G = (V, E)$ je degree-distance magic graf řádu n s magickou konstantou k a $H = (V, E)$ je degree-distance magic graf řádu n s magickou konstantou l . Pro graf H bude platit, že je stejného řádu jako graf G a může obsahovat izolované vrcholy. Jestliže ztotožníme vrcholy grafu G a grafu H příslušných labelů a žádná hrana se při ztotožnění nezopakuje, pak výsledný graf je degree-distance magic graf.

Důkaz. Pro provedení důkazu si označme:

i) $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vrcholy grafu G ,

ii) $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vrcholy grafu H .

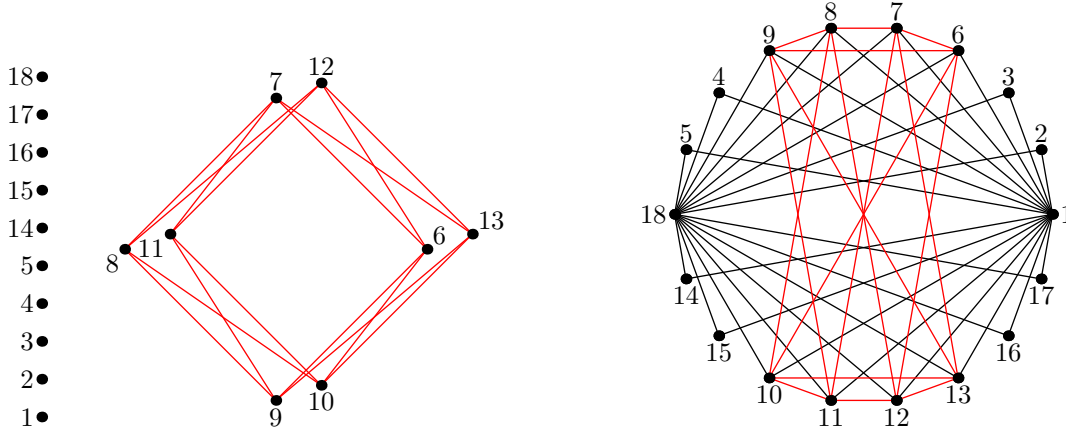
Degree-distance magic graf G má magickou konstantu $k = (n+1)/2$. Po ztotožnění vrcholů grafu G a grafu H příslušných labelů se váha nezmění vrcholům, které byly ztotožněny s izolovanými vrcholy grafu H . Musíme ověřit, jestli se váha nezměnila vrcholům, které mají po ztotožnění vrcholů grafu G a grafu H vyšší stupeň.

Jestliže původně byla váha vrcholu rovna $(n+1)/2$, pak vynásobení váhy vrcholu stupněm vrcholu $\deg_G(v_i)$ nám dá součet ohodnocení sousedů vrcholu v_i . Po ztotožnění vrcholů grafu G a grafu H příslušných labelů se stupeň vrcholu v_i zvýšil o $\deg_H u_i$ a součet ohodnocení sousedů se zvýšil o $((n+1)/2) \deg_H u_i$.

$$w(v_i) = \frac{\frac{(n+1)}{2} \deg_G(v_i) + \frac{(n+1)}{2} \deg_H(u_i)}{\deg_G(v_i) + \deg_H(u_i)} = \frac{\frac{(n+1)}{2} (\deg_G(v_i) + \deg_H(u_i))}{\deg_G(v_i) + \deg_H(u_i)} = \frac{n+1}{2}$$

Váha vrcholu zůstala stejná. Jedná se o degree-distance magic graf. \square

Příklad 3.34. Přidejme do degree-distance magic grafu G řádu $n = 18$ graf $C_4[\overline{K_2}]$ tak, aby výsledný graf byl degree-distance magic graf. Musíme zkonstruovat graf H , který bude mít vhodně ohodnocený podgraf $C_4[\overline{K_2}]$ tak, aby váha každého vrcholu podgrafu $C_4[\overline{K_2}]$ byla $(n+1)/2$ a bude obsahovat 10 ohodnocených izolovaných vrcholů. Na obrázku 29 je znázorněn graf H a ztotožnění vrcholů grafu G a grafu H .



Obrázek 29: Ztotožnění vrcholů grafu G a grafu H .

Věta 3.35. Necht $G = (V, E)$ je degree-distance magic graf řádu n s magickou konstantou k a $H = (V, E)$ je degree-distance magic podgraf řádu n s magickou konstantou l . Pro graf H bude platit, že je stejného řádu jako graf G a může obsahovat izolované vrcholy. Jestliže z grafu G odebereme hrany grafu H a graf G zůstane souvislý, pak výsledný graf je degree-distance magic graf.

Důkaz. Pro provedení důkazu si označme:

i) $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vrcholy grafu G ,

ii) $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vrcholy podgrafu H .

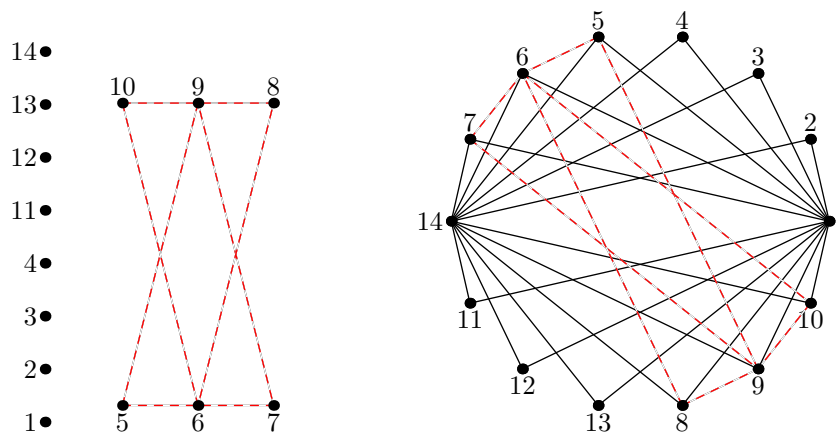
Degree-distance magic graf G má magickou konstantu $k = (n+1)/2$. Po odebrání hran grafu H z grafu G se váha nezmění vrcholům, kterým zůstane po odebrání hran stejný stupeň vrcholu. Musíme ověřit, jestli se váha nezměnila vrcholům, které mají po odebrání hran grafu H z grafu G nižší stupeň.

Jestliže původně byla váha vrcholu rovna $(n+1)/2$, pak vynásobení váhy vrcholu stupněm vrcholu $\deg_G(v_i)$ nám dá součet ohodnocení sousedů vrcholu v_i . Po odebrání hran grafu H z grafu G se stupeň vrcholu v_i snížil o $\deg_H u_i$ a součet ohodnocení sousedů se snížil o $((n+1)/2) \deg_H u_i$.

$$w(v_i) = \frac{\frac{(n+1)}{2} \deg_G(v_i) - \frac{(n+1)}{2} \deg_H(u_i)}{\deg_G(v_i) - \deg_H(u_i)} = \frac{\frac{(n+1)}{2} (\deg_G(v_i) - \deg_H(u_i))}{\deg_G(v_i) - \deg_H(u_i)} = \frac{n+1}{2}$$

Váha vrcholu zůstala stejná. Jedná se o degree-distance magic graf. \square

Příklad 3.36. Odeberme z degree-distance magic grafu G řádu $n = 14$ hrany podgrafu $P_3[\overline{K_2}]$ tak, aby výsledný graf byl degree-distance magic graf. Musíme se ujistit, že graf H , má vhodně ohodnocený podgraf $P_3[\overline{K_2}]$ tak, že váha každého vrcholu podgrafu $P_3[\overline{K_2}]$ je $(n+1)/2$ a obsahuje 8 ohodnocených izolovaných vrcholů. Na obrázku 30 znázorněn graf H a odebrání hran grafu H z grafu G .



Obrázek 30: Graf H a odebrání hran grafu H z grafu G .

Z platnosti Věty 3.33 a Věty 3.35 můžeme vyvodit následující tvrzení.

Důsledek 3.37. Nechtě $G = (V, E)$ je graf řádu n a $H = (V, E)$ je degree-distance magic podgraf grafu G . Předpokládejme, že graf H je stejného řádu jako graf G . Graf H může obsahovat izolované vrcholy a má magickou konstantu $l = (n + 1)/2$, přičemž pro izolované vrcholy váhu nevyčísľujeme. Graf G je degree-distance magic graf právě tehdy, když graf $G - E(H)$ je degree-distance magic graf.

4 Závěr

Tato bakalářská práce prezentuje výsledky z oblasti distance magic labelingu. V této bakalářské práci jsme zavedli nový degree-distance magic labeling a vytváříme řadu konstrukcí degree-distance magic grafů.

Využili jsme Kotzigovy matice pro konstrukci degree-distance magic grafů $G[\overline{K_m}]$. Kotzigova matice neexistuje v případě, že řád grafu G je sudý a řád grafu $\overline{K_m}$ je lichý, proto jsme navrhli upravenou Kotzigovu matici. Upravenou Kotzigovu matici využijeme k nalezení degree-distance magic labelingu grafu $G[\overline{K_m}]$, kde graf G splňuje podmínky Věty 3.8.

Provedli jsme klasifikaci existence grafů v závislosti na třech vlastnostech:

- být distance magic graf
- být degree-distance magic graf
- být pravidelný graf

Ukázali jsme, že existuje nekonečně mnoho grafů v následujících pěti podmnožinách:

- i)* nepravidelné, pro které existuje distance magic labeling a neexistuje degree-distance magic labeling
- ii)* nepravidelné, pro které neexistuje distance magic labeling a existuje degree-distance magic labeling
- iii)* nepravidelné, pro které existuje distance magic labeling i degree-distance magic labeling
- iv)* pravidelné, pro které existuje distance magic labeling i degree-distance magic labeling
- v)* pravidelné, pro které neexistuje distance magic labeling ani degree-distance magic labeling

Dokázali jsme, že množina pravidelných distance magic grafů je shodná s množinou pravidelných degree-distance magic grafů. Neexistuje tedy pravidelný graf, který má buď distance magic labeling nebo degree-distance magic labeling.

V průběhu psaní této bakalářské práce byl formulován otevřený problém, zda magická konstanta degree-distance magic grafu G na n vrcholech je $k = (n + 1)/2$. Tento otevřený problém byl jedním z hlavních témat jednoho matematického semináře DIMAS a následně problém vyřešili Prof. Zdeněk Dostál a Doc. Petr Kovář. Vyřešení problému vedlo k odvození dalších důsledků.

Díky jednoznačnosti magické konstanty degree-distance magic grafu, jsme dokázali, že neexistuje graf G řádu $n \equiv 0 \pmod{2}$, kde má alespoň jeden vrchol v_i stupeň vrcholu $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod{2}$.

Využili jsme operaci grafového spojení ke konstrukci poměrně obecných degree-distance magic grafů, spojovali jsme degree-distance magic graf a graf tvořený izolovanými vrcholy.

Reference

- [1] M. Miller, C. Rodger, and R. Simanjuntak, Distance magic labelings of graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 28, (2003), strany 305–315.
- [2] P. Kovář, *Teorie grafů*, VŠB-TUO, (2013), strany 34–44.
- [3] S. Arumugam, D. Froncek, and N. Kamatchi, Distance Magic Graphs—A Survey, *Special Edition* (2011), strany 11–26.
- [4] P. Kovář, Degree Distance Magic Graphs, (2013), strana 3.
- [5] J. A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS 6 (2011).